集合の考え方を意識した確率の問題に関する数学科教材開発

児童学部　児童学科　松岡　学

要旨：確率の問題を扱う際、その背後に集合の考え方が潜んでいる場合がある。本研究においては、集合の考え方を意識させることで、高校生に確率に対する新たな視野をもたせることを目的とする。具体的な教材としては、最初にさいころの最大値、最小値を求める問題を考える。模範解答はやや直観的で理解しずらい部分もあるので、集合の考え方を用いて正確な説明を試みる。次に、完全順列の問題を考える。完全順列についても集合の考え方を用いた正確な記述を行う。最後に、授業実践のアンケート結果について報告し、今後の成果と課題を述べる。

キーワード：確率、集合、さいころ、完全順列、興味・関心

1　研究目的

高校数学において、確率の問題は“直接数える”ことで解ける問題も多く、生徒にとっては直観的で取り組みやすい分野であるといえる。しかし、時として直観に頼っている説明などもあり、やや分りづらい部分があることも事実である。本研究においては、教材開発を通してその辺りを掘り下げてみたいと思う。

高校において、「集合」を学習した後に「確率」を学習するが、生徒は別々のものと認識しており、両者の関係性を意識していないこともある。そのようなことを踏まえて、内山他（2000）や松岡（2002）によって確率と集合の関係性を意識させるような教材が開発された。本研究においてはそれらの教材を改良し、具体的に授業実践を行える形にまとめた。

教材開発を行う際、具体的に次の 3 点に重点を置いた。

[1] 数学的に正確な記述
[2] 集合と確率の関連性
[3] 確率への興味・関心の育成

また、数学教育の観点からは次の視点を意識した。

[4] MKT の視点
[5] 数学化の視点

＜数学的に正確な記述＞

確率は直観的に扱いやすい分野であるが、本教材においては数学的に正確な記述を試みた。具体的には、集合の言葉を用いることで、数学的に正確な定式化を行うことができた。そのため、確率の問題を解く際、生徒の理解度をあげるために、集合の復習プリントを用意した。

＜集合と確率の関連性＞

確率の問題の解法において、集合の考え方を用いることで、確率と集合の関連性が明確となるような教材を作成した。具体的には、確率の考え方を中心にして解く方法と、集合と関連づけて解く方法の 2 種類を用意した。

＜確率への興味・関心の育成＞

確率の問題の数学的に正確な記述や確率と集合の融合などを通して、高校生の数学への興味・関心を育てることを意図している。

“MKT”や“数学化”につては次節で詳しく述べるが、MKT はハイマン・バスとデボラ・ボールが取り上げている数学教育であり、数学化はフロイデンタールが重視している視点である。

本研究は、今回開発した教材により高校生の確率や集合への理解が定着し、さらに、数学に深い興味をもたせることを目的としている。

2　MKT と数学化

(1) ハイマン・バス

ハイマン・バスは、1932 年にテキサスで生まれ、プリンストン大学で学問を学んだ。学生時代に、エミール・アルティンの解析学、ジョン・ミルナーの微分幾何、ラルフ・フォックスの代数などの講義を受けている。プリンストン大学を卒業後、シカゴ大学に移り、カプランスキーの指導の下で 1959 年に Ph.D. を取得、1960 年からはコロンビア大学で教授職に就く。

彼は大学において純粋数学の研究を行った。学位論文を基にした論文 Bass（1960）において半完全環（semi−perfect ring）についての成果を発表した。また、主著書は代数的 K 理論（Algebraic K−theory），について書かれた Bass（1968）である。これらのように、彼は環論や代数的 K 理論で大きな貢献をした。

1991 年に全米アカデミーの数理科学教育委員会の委員になったことから、バスは数学教育に関心をもつようになる。1993 年から 2000 年には委員長を務めている。また、1995 年から 2000 年はアメリカ数学会教育委員会の委員長を務めている。

(2) バスとボールの MKT

バスは共同研究者であるデボラ・ボールと共に MKT プロジェクトを行った。MKT とは、Mathematical Knowledge for Teaching（教えるための数学的知識）の略である。「教えること」は、教師が学校で授業をすることを想定している。また、「知識」とは、授業の準備や授業後の評価活動も含む「教えるという仕事に実際に従事するために必要な、数学に関係する知識、技能、思考法の特性、感覚」を総称したものである。本論文においても、バスに倣って「教えるための数学的知識」を MKT と略記で表す。MKT やバスの取組みについての文献は、蟹江幸博（2009）やバス自身による Bass（2005）がある。

MKT には次の 4 つのカテゴリーが存在する。

①一般的な数学知識
②特殊専門的な数学知識
③数学と生徒に関する知識
④数学と教授法に関する知識

確率の問題を例にとれば、4 つのカテゴリーはそれぞれ次のようになる。

①標準的な確率の指導法
②専門的な確率の指導法。生徒の標準的でない解答が正しいか誤っているかを分析する方法
③生徒が間違いやすい箇所
④確率の問題を指導する際の最も適した題材や提示法

本論文では、②と④に関係して、発展的な立場から確率の教材開発を行う。そしてその結果、確率への興味・関心を育てることが目的である。

(3) フロイデンタール

フロイデンタールはドイツのルッケンヴァルデに生まれ、ベルリンとパリの大学で学問に励んだ。その後、ブラウワーに招かれてオランダのアムステルダムで活動を行う。1946 年にはユトレヒトの国立大学の教授として任命された。彼はそこで純粋数学の研究を行った。特に、リー群やトポロジーで大きな貢献をした。リー群の構成については、Freudenthal（1951）が有名である。

彼は数学教育にも強い関心を持っており、教師から一方的に数学的知識を教えるような教授法を問題視していた。現実の問題から出発し、生徒自身により数学化という活動を行わなければならない、としている。彼はオランダの代表として、ICMI（The International Commission on Mathematical Instruction）の一員となり、1966 年から 1970 年まで会長の職を務める。Freudenthal (1991) は、彼の数学教育の集大成である。

(4) フロイデンタールの数学化

フロイデンタールは、現実の問題を数学におきかえることを「数学化する」と呼び、数学教育において重要なものであると位置づけた。Freudenthal（1973）には次のように記されている（訳は、塩見拓博（2007）による）。

> 学生は数学化することを学ぶべきである－私が意味するのは、始めるのに、現実の場面を数学化することである。数学的な場面を数学化することは終点であって、出発点ではない。

高校の数学においては、高度な式変形や論理の展開が多く、教科者や参考書を見ても、必ずしも現実の問題から出発しているとは限らない。しかしながら、確率の問題は、“さいころを振る”“じゃんけんをする”などのように日常生活に根差したテーマが多く、フロ

イデンタールのいう数学化に適した分野であるといえる。

3　さいころの確率に関する教材

(1) 教材開発のねらい

高校数学の確率の分野で、さいころの問題を指導する際、“余分なものを引いたり足したりする”という考え方で解く問題がある。この考え方は、直観的には非常に分かりやすいが、その反面少しあいまいな感じもする。この考え方を数学的に正確に表現するためには、集合の和集合の個数公式を用いる必要がある。

そこで、確率と集合を結びつけることで、確率の問題を正確に表現し、さらに、「確率と集合の融合」という、非常に興味深い内容を明らかにすることが、本教材開発のねらいである。

(2) 教材の内容

確率の問題の題材として「さいころの問題」を選定した理由は、さいころの問題は、確率において最もオーソドックスであり、誰しもが気軽に取り組める内容であるからである。素朴なさいころの問題の裏側に、“集合の考え方”が横たわっていることを明らかにすることが、本研究のねらいである。

以上のことを踏まえて、本研究においては、「表1」「表2」にあるような問題プリントを作成した。

表1　問題プリント（さいころの問題）

問題1

1つのさいころを4回投げるとき、出た目の最大値が5、最小値が3である確率を求めよ。

（解答1）

出る目が4回ともa以上b以下である確率を$P(a \leqq x \leqq b)$と表す。

最大値が5、最小値が3ということは、

4回とも3以上5以下の目が出なければならないので、

$$P(3 \leqq x \leqq 5)$$

最大値が5のとき、少なくとも1回は5の目が出なければならないので、

$$P(3 \leqq x \leqq 5)-P(3 \leqq x \leqq 4)$$

最小値が3のとき、少なくとも1回は3の目が出なければならないので、

$$P(3 \leqq x \leqq 5)-P(3 \leqq x \leqq 4)-P(4 \leqq x \leqq 5)$$

ここで、4回とも4の目が出る確率を余分に引き過ぎているので、

求める確率Pは、

$$P=P(3 \leqq x \leqq 5)-P(3 \leqq x \leqq 4) -P(4 \leqq x \leqq 5)+P(x=4)$$

となる。

よって、

$$P=\left(\frac{3}{6}\right)^4-\left(\frac{2}{6}\right)^4-\left(\frac{2}{6}\right)^4+\left(\frac{1}{6}\right)^4 =\frac{81-16-16+1}{6^4} =\frac{25}{648}$$

（解答終り）

解答1は、標準的なものであるが、“余分なものを引いたり足したりする”という部分がやや直観的である。そこで、次は集合の考え方を用いて生徒に説明する。しかし、いきなり説明するのではなく、生徒の理解度をあげるために、次のような集合に関する復習プリントを作成した。

表2　集合の復習プリント

・集合とは？
（　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

・集合Aに属する要素の個数を$n(A)$と表す。

・公式
全体集合をU、その部分集合をA, Bとする。
$n(A \cup B)=$（　　　　　　　　　　）
（その理由）

・公式
全体集合をU、その部分集合をA, B, Cとする。
$n(A \cup B \cup C)=$（　　　　　　　　　　）

・全体集合Uに属し、その部分集合Aに属さない要素の集合を、Aの補集合といい、$\bar{A}$または、$U \backslash A$と表す。

・公式
全体集合をU、その部分集合をAとする。
$n(\bar{A})=$（　　　　　　　　　　）

（解答）

・集合とは、属していることがはっきりしているものの集まりのことである。

・全体集合をU、その部分集合をA, Bとする。
$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$

・全体集合をU、その部分集合をA, B, Cとする。
$$n(A \cup B \cup C) =n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B) -n(B \cap C)-n(C \cap A)+n(A \cap B \cap C)$$

・全体集合をU、その部分集合をAとする。
$$n(\bar{A})=n(U)-n(A)$$

（解答終り）

集合の復習プリントを学習した後、問題１の次のような別解を説明する。

表３　集合の考え方を用いた問題１の別解

（解答２）
さいころを４回投げるとき、１回目に出る目をk、２回目に出る目をl、３回目に出る目をm、４回目に出る目をnとする。（$1 \leqq k, l, m, n \leqq 6$）ここで、全体集合$U$とその部分集合$V, A, B$を、このような整数の組（$k, l, m, n$）として、次のように定義する。

$$U = \{(k, l, m, n) \mid 1 \leqq k, l, m, n \leqq 6\}$$
$$V = \{(k, l, m, n) \mid 3 \leqq k, l, m, n \leqq 5\}$$
$$A = \{(k, l, m, n) \mid 3 \leqq k, l, m, n \leqq 4\}$$
$$B = \{(k, l, m, n) \mid 4 \leqq k, l, m, n \leqq 5\}$$

このとき、ド・モルガンの法則から

$$V \setminus (A \cup B) = (V \setminus A) \cap (V \setminus B)$$

したがって、

$V \setminus (A \cup B)$

$= \{(k, l, m, n) \mid \{k, l, m, n\}$の最大値が５, 最小値が３$\}$

すなわち、さいころを４回投げるとき、出た目の最大値が５、最小値が３である場合の数は$n(V \setminus (A \cup B))$となる。よって、

$$\begin{aligned} n(V \setminus (A \cup B)) &= n(V) - n(A \cup B) \\ &= n(V) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= n(V) - n(A) - n(B) + n(A \cap B) \\ &= 3^4 - 2^4 - 2^4 + 1^4 = 50 \end{aligned}$$

また、さいころを４回投げるときの全事象の個数は、

$$6^4 = 1296$$

よって、

確率Pは、$P = \dfrac{50}{1296} = \dfrac{25}{648}$

（解答終り）

（補足）
解答における等式

$$n(V \setminus (A \cup B)) = n(V) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$

の両辺を$n(U)$で割り、（解答１）の記号を使うことで、次の式を得る。

$$P = P(3 \leqq x \leqq 5) - P(3 \leqq x \leqq 4) - P(4 \leqq x \leqq 5) + P(x = 4)$$

すなわち、（解答１）における等式を、集合の考え方を用いることで、正確に証明することができた。

（3）教材開発の意図

教材として身近な題材である“さいころの”問題を扱うことで、高校生に確率への親近感をもたせることを意図した。

また、「模範解答」の後に「集合のプリント」を行うことで、高校生が集合について自然に復習ができ、なおかつ次の段階である「集合を用いた解答」への布石となるように配慮した。

本テーマは“さいころを投げる”という日常生活におけるものであるが、“最大値を求めよ”と本教材では問題を数学的に定式化しているので、数学化という視点は弱い。その理由としては、本教材に含まれる内容が高校数学としては極めて高度なため、今回は定式化された形で問題を作成した。今後は、数学化のプロセスが明確になるような教材に発展させることが課題である。

4　完全順列に関する教材

（1）教材開発のねらい

さいころの問題において、集合の考え方を意識した教材を作成したが、これは完全順列の場合にもあてはまる。すなわち、完全順列においても、時として直観に頼っている説明などがあるので、集合の考え方を意識した教材を作成することは意味があると思われる。

（2）教材の内容

完全順列における標準的な問題である次のような問題プリントを考える。

表４　問題プリント（完全順列の問題）

$1, 2, \cdots, n$の順列$a_1, a_2, \cdots, a_n$で、任意のiに対して$a_i \neq i$である順列を完全順列という。

問題２
箱がn個、カードがn枚あって、それぞれ１からnまでの数字が書いてある。このn枚のカードを１枚ずつ箱に入れるとき、カードの数字と箱の数字の一致するものが１つもないような入れ方の総数を$f(n)$で表わす。
$f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = (\ \ )$である。
これから

$$\begin{aligned} f(5) &= 5! - \{(\ \ )f(4) + (\ \ )f(3) + (\ \ )f(2) + 1\} \\ &= (\ \ ) \end{aligned}$$

（考え方）一致する番号の数で場合分けをする。
（解答）４枚のカードの入れ方の総数は

$$4! = 24\text{通り}$$

カードと箱の数がすべて一致するものは１通り、
３個だけ一致するものは０通り、
２個だけ一致するものは${}_4C_1 f(2)$通り
（一致する２個の選び方が${}_4C_2$通り、そのそれぞれに対して、残り２個を一致しないように入れる入れ方が$f(2)$通り）、
１個だけ一致するものは${}_4C_1 f(3)$通りある。
以上より、全体から一致している場合を引いて

$$\begin{aligned} f(4) &= 4! - \{{}_4C_1 f(3) + {}_4C_2 f(2) + 1\} \\ &= 24 - \{8 + 6 + 1\} = 9 \end{aligned}$$

$f(5)$ の場合も、$f(4)$ と同様に考えて

$$f(5) = 5! - \{{}_5C_1 f(4) + {}_5C_2 f(3) + {}_5C_3 f(2) + 1\}$$
$$= 5! - \{5f(4) + 10f(3) + 10f(2) + 1\}$$
$$= 120 - (45 + 20 + 10 + 1) = 44$$

（解答終り）

問題 3

1, 2, ⋯, n を並べかえたものを $a_1, a_2, \cdots, a_n$ とし、すべての i に対して $a_i \neq i$ となるような並べ方の総数を $f(n)$ で表わす。このとき、$f(n)$ を求めよ。

（取り込みと押し出しの方法による解答）

少なくとも 1 個の a_i が $a_i = i$ となるような順列の集合を A とする。

順列の総数から、一致している場合を引くことによって、$f(n) = n! - n(A)$ を得る。

ここで、

$n(A)$ を求めたい。$a_i = i$ となる順列は $(n-1)!$ 通りあり、1, 2, ⋯, n より全部で ${}_nC_1 \cdot (n-1)!$ 通りある。

ここで、「$a_1 = 1$ かつ $a_2 = 2$」などとなるものが重複して数えられる。そこで、“数え過ぎ”を引いて

$${}_nC_1 \cdot (n-1)! - {}_nC_2 \cdot (n-2)!$$

今度は、「$a_1 = 1$ かつ $a_2 = 2$ かつ $a_1 = 1$」などとなるものを引き過ぎている。このように順次考えていくと

$$f(n) = n! - \{{}_nC_1 \cdot (n-1)! - {}_nC_2 \cdot (n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}{}_nC_n 0!\}$$

を得る。

${}_nC_i$ を計算して変形すると、次のようになる。

$$f(n) = n!\left\{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}\right\}$$

（解答終り）

「表 4」にあるように、「取り込みと押し出しの方法」を用いることで、一般の完全順列の総数 $f(n)$ を求めることができる。しかし“数え過ぎ”を引いたり、“引き過ぎ”を足したり、という部分がやや直観的で分りづらいのも確かである。このことから、集合の個数公式を用いた解答を考えてみる。

今回もさいころの問題の時と同様、別解に進む前に「表 5」のプリントで集合に関する演習問題を行う。

表 5　個数公式に関するプリント

公式

全体集合 U とし、その部分集合 A, B, C とする。和集合 $A \cup B \cup C$, の要素の個数について、次の等式が成り立つ

$$n(A \cup B \cup C)$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \quad \cdots(*)$$

問題 4

上記にある集合の 3 個の場合の和集合の個数公式を証明せよ。

公式

全体集合 U とし、その部分集合を $A_1, \cdots, A_n$ とする。

和集合 $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ の要素の個数について、

次の等式が成り立つ。

$$n(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$$
$$= n(A_1) + \cdots + n(A_n)$$
$$- n(A_1 \cap A_2) - \cdots - n(A_{n-1} \cap A_n)$$
$$+ n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + n(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)$$
$$- \cdots - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \quad \cdots(*)$$

問題 5

上記にある集合の n 個の場合の和集合の個数公式を証明せよ。

（問題 4 の考え方）

$a \in A$, $a \in A \cap B$, $a \in A \cap B \cap C$ のときなどで場合分けをして、a が $(*)$ の右辺によって何回足されるかを考える。

（問題 4 の解答）

（ｉ）「$a \in A$ かつ $a \notin B$ かつ $a \notin C$」のとき、

a が $(*)$ の右辺によって

$n(A) + n(B) + n(C)$ の部分で 1 回足される。

$-n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$ の部分で 0 回足される。

$n(A \cap B \cap C)$ の部分で 0 回足される。

よって、最終的に 1 回足される。

「$a \in B$ かつ $a \notin A$ かつ $a \notin C$」,

「$a \in C$ かつ $a \notin A$ かつ $a \notin B$」のときも同様。

（ⅱ）「$a \in A \cap B$ かつ $a \notin C$」のとき、

a が $(*)$ の右辺によって

$n(A) + n(B) + n(C)$ の部分で 2 回足される。

$-n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$ の部分で

-1 回足される。

$n(A \cap B \cap C)$ の部分で 0 回足される。

よって、最終的に 1 回足される。

「$a \in B \cap C$ かつ $a \notin A$」、

「$a \in C \cap A$ かつ $a \notin B$」のときも同様。

（ⅲ）「$a \in A \cap B \cap C$」のとき、

a が $(*)$ の右辺によって

$n(A) + n(B) + n(C)$ の部分で 3 回足される。

$-n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$ の部分で

-3 回足される。

$n(A \cap B \cap C)$ の部分で 1 回足される。

よって、最終的に 1 回足される。

したがって、すべての場合で a は $(*)$ の右辺によって、1 回だけ足される。

よって、等式 $(*)$ が証明された。

（問題 5 の解答）

任意の $a \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ について、a が（$*$）の右辺によって何回足されるかを計算し、それが 1 であることを証明する。

一般に「$a \in A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_n}$ かつ

$j_1, j_2, \cdots, j_r$ 以外の j に対して、$a \notin A_j$」と仮定する。

a が（$*$）の右辺によって

$n(A_i)$ の部分で ${}_rC_1$ 回足される。

$n(A_{i_1} \cap A_{i_2})$ の部分で $-{}_rC_3$ 回足される。

$n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$ の部分で ${}_rC_3$ 回足される。

……

以上より、a は（$*$）の右辺で

${}_rC_1 - {}_rC_2 + {}_rC_3 - \cdots + (-1)^{r-1} \cdot {}_rC_r$ 回足される。

ここで、2 項定理

$$(a+b)^r = {}_rC_0 a^r + {}_rC_1 a^{r-1} b + {}_rC_2 a^{r-2} b^2 - \cdots + (-1)^r \cdot {}_rC_r$$

において、$a = 1, b = -1$ とおくと、

$$0 = 1 - {}_rC_1 + {}_rC_2 - {}_rC_3 + \cdots + (-1)^r \cdot {}_rC_r$$

したがって、

$${}_rC_1 - {}_rC_2 + {}_rC_3 - \cdots + (-1)^{r-1} \cdot {}_rC_r = 1$$

よって、等式（$*$）が証明された。

（解答終り）

個数公式のプリントを学習した後、集合の考え方を用いて、問題 3 の別解を説明する。集合の個数公式を用いて表現することで、数学的に正確に記述することができる。

表 6　集合の考え方を用いた問題 3 の別解

（解答 2）

完全順列の総数は、順列の総数から少なくとも 1 つは一致している場合を引けばいいので、

$f(n) = n! - n(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ となる。

ここで、集合の個数公式を用いると

$$n(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = {}_nC_1 \cdot (n-1)! - {}_nC_2 \cdot (n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1} {}_nC_n 0!$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f(n) &= n! - n(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= n! - \{ {}_nC_1 \cdot (n-1)! - {}_nC_2 \cdot (n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1} {}_nC_n 0! \} \\ &= n! \left\{ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} \right\} \end{aligned}$$

（解答終り）

(3) 教材開発の意図

問題 2 は完全順列の問題に初めての高校生にも、抵抗が少ないように、「箱とカード」を用いて問題設定をおこなった。問題形式としては、穴埋めで誘導することで、模範解答へ自力でたどり着けるように配慮した。次の段階として、一般的な表現方法である数列を用いた表現で記述した。

また、問題 3 の「模範解答」と「集合を用いた解答」の間に、集合の個数公式に関する考察を行うことで、高校生が集合を用いた解答にスムーズに移行できるように工夫した。

こちらの教材も最初から問題が定式化されているので、さいころの問題と同様、数学化のプロセスが明確になるような教材に発展させることが課題である。

5　授業実践

(1) 実践

筆者の以前の勤務高校である三重県立四日市高等学校（以下、四日市高校）の科学クラブの生徒に対して、授業実践を行った。科学クラブは 1 年生と 2 年生からなる。四日市高校は地域の進学校であり、比較的学力の高い生徒が多い。中でも、科学クラブに所属する生徒は、理数系に興味のある生徒が多いので、本研究のような発展的な教材で模擬授業を行うには適していると判断をした。

2011 年 7 月に科学クラブ 14 名の生徒に対してさいころの問題を用いた模擬授業を行い、2012 年 3 月に科学クラブ 9 名の生徒に対して完全順列の問題を用いた模擬授業を行った。2011 年 7 月の時点で、四日市高校の 1 年生は確率や集合について既に学習を終えているため、題材と実施時期についても適切であると判断した。授業時間は共に、約 120 分である。生徒が問題を解く時間を長く確保したことや説明をゆっくり丁寧にしたことなどで、実施時間は長くなった。簡潔に授業を進めれば、60〜90 分の教材になると思われる。

授業内容は基本的に、さいころの問題は「表 1〜3」の通り、完全順列の問題は「表 4〜6」の通りに行った。ただし、「表 5」の n 個の場合の個数公式は難易度が高いため、証明はせずに、3 個の場合と同じように n 個の場合にも成り立つことを説明することに止めた。

(2) アンケート結果

模擬授業の後、生徒に書かせた感想の一覧を「表 7」「表 8」に挙げておく。

表 7　さいころの問題に関する感想

○感想

・問題を解いて、その模範解答をさらに証明するなんてすごいと思いました。確率の問題が集合を使って解け

ること。
・集合は論理的で良い。数学というより、ちょっと哲学。
・この解答を他の部の人がやった時、どう思うのかが聞きたいです。
・今日の授業で、数Ａの教科書が、なぜあの順番になっているのかが分かった気がした。別解はかなり面倒だけど、集合で考えるのも大切だと思った。
・もっと掘り下げて、発展させてもいいと思います。もっと宇宙語を取り扱いたいです。
・とても面白かったです！ 普段の授業も松岡先生に教えていただきたいくらいです☆ また先生の講義、うけたいです！ ありがとうございました！
・たくさん準備していただいて、ありがとうございました。確率や集合をもっと勉強して、好きになれるようにしたいと思いました。
・すごくたのしく、ためになる授業でした。ありがとうございました。
・「別解」を考えることで、理解を深めることができるということが分かった。
・宇宙語は得意ですが、今日の宇宙語は結構ややこしかったです。
・とても楽しい授業でした。数学っていろんなところが、つながってるんだなって感じました。
・素晴らしい証明で、FG（参考書）に圧勝していると思い、「凄い」の一言だと思った。
・先生の講義はこれがはじめてで、先生のキャラに驚いた。こんなにおもしろい授業だったら、数学がさらに好きになると思う。
・説明付きならまだ分かることなので、自分でも証明できるようになりたいと思った。もっと色々知りたいと思った。

表８　完全順列の問題に関する感想

○感想
・集合の公式は万能だと思った。
・完全順列には前から興味があったので良かったです。キレイな公式になって良かったです。
・とっつきにくい問題ではあったけれど、集合の基礎的な部分から、完全順列の求め方にまで発展してすごかった。
・順列や場合の数は数学の中では苦手な方ですが、面白くて興味がもてました。
・次はｎ！を計算・・・？
・実際に数字がある問題の後に、ｎのときを求める問題が来ると、いつも嫌だなと思っていましたが、ｎのときの公式を求めてから数字を当てはめた方が楽だと分かったので、見方が変わり、講義を受けて良かったです。
・段階を踏んで求めていくようなものを、規則性のある一般化された式で表現していて凄いと思う、と同時に、具体計算は大変そうだと思った。
・難しかったです。でも、松岡先生の気合いがすごくて、今回の講義を受けることができて、良かったと思いました。どんどん大きな世界に広がっていって、面白かったです。

生徒の感想を見ると、さいころの問題については、「確率の問題が集合を使って解けること。」「集合は論理的で良い。数学というより、ちょっと哲学。」のように、“確率と集合の関係”や“集合の論理性”に関するものもあり、こちらの意図したことが生徒に適切に伝わっていることが分かる。また、「数Ａの教科書が、なぜあの順番になっているのかが分かった気がした。」というような、教科書の（単元の）配列にまで言及している感想もあった。教科書の配列に関しては、教師の側が考えることでり、生徒の時点でそこまで気付くというのは、こちらの予想以上の収穫である。また、普段の授業と比べて、記号の使い方が独特のため、生徒が記号に抵抗を示さないか不安であった。そのため、別解の説明中に記号が多数出てきた際に、「これは宇宙語ではなく、数学の記号ですよ。」と一言添えた。感想に「もっと宇宙語を取り扱いたいです。」とあるように、生徒が数学の記号に対して、前向きに捉えていることが分かる。

完全順列については、内容としてはｎ個の場合を扱っており、生徒の理解度が不安であったが、「キレイな公式になって良かったです。」のように、生徒はｎ個の場合も抵抗なく受け入れていることが分かる。解法としては問題２と問題３の模範解答は、段階を踏んで順次求めていく解法であり、その後問題３の別解では個数公式を用いて正確に記述する解法であった。それに関しては、「段階を踏んで求めていくようなものを、規則性のある一般化された式で表現していて凄いと思う」とあった。こちらの解法の配列も十分に読み取っている感想であり、生徒の理解度の高さが伺える。また、「順列や場合の数は数学の中では苦手な方ですが、面白くて興味がもてました。」のように、本教材が興味・関心の育成にも役立っていることが分かる。

本研究における教材は、内容的には極めて高度な部分を含んでいたため、生徒の理解度などが不安であったが、こちらの予想以上に生徒は内容を理解していたことが伺える。進学校の科学クラブで実施したことが理解度が高い要因であると思われる。

6　成果と課題

本研究により得られた成果や課題は次の６点である。

(1) 数学的に正確な記述
確率の問題における模範解答の中には、直観に頼っているものもあるが、本研究は数学的に正確な解答を与えることができた。これにより高校生が“解答がしっくりこない”という部分を解消できると思われる。また、“数学的に正確な記述”の醍醐味を味わうことができる。

(2) 集合と確率の関連性
集合を意識した解答を考えることで、確率と集合の関係を明らかにする教材を開発することができた。それにより、何気ないさいころの問題の奥にも集合の考え方が横たわっていることが分かった。本教材を通して、高校生が“確率”と“集合”を別々のものではなく、繋がりのあるものとして見ることができる。

(3) 数学への興味・関心の育成
さいころの問題や完全順列などを題材として、数学への興味・関心を育成するための教材を開発した。具体的には、興味・関心の育成のために「確率と集合の融合」「数学的に正確な記述」「別解を考えることの興味深さ」「具体的な数字の場合をn個の場合に一般化すること」「数学的な現象を適切な記号で表現すること」などの数学的な内容を詰め込んだ教材を作成することができた。

(4) MKTの視点
数学教育におけるMKTの視点としては、“さいころ”や“完全順列”を題材として、「特殊専門的な数学知識」や「数学と教授法に関する知識」に関する具体的な教材を作成できた。すなわち、「確率の専門的な指導法」や「確率の問題を指導する際の最も適した題材や提示法」の具体例を、本研究にて提示することができた。今後は、他のテーマにおいてもMKTの視点に則した教材を作成することが課題である。

(5) 数学化の視点
“さいころ”や“完全順列”は現実の現象であり、数学化に適した題材といえる。しかし、本教材は最初から問題が定式化されており、数学化の視点が弱いといえる。その理由としては、本教材に含まれる内容が高校数学としては極めて高度なため、今回は定式化された形で問題を作成したからである。今後は、数学化のプロセスが明確になるような教材に発展させることが課題である。

(6) 教材の難易度
本研究においては、授業実践を進学校の科学クラブで実施したため、難易度の高い教材ではあるが、一定の成果が得られた。本教材に対する生徒の理解度の高さは感想から伺うことができる。今後はすべての高等学校で使えるような教材へと改良する必要がある。

参考文献

Bass, H. (1960) “Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings”, Trans. Amer. Math. Soc. 95, 466-488.
Bass, H. (1968) “Algebraic K-theory”, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc/Addison-Wesley, Reading, MA.
Bass, H.（2005）“Mathematics, Mathematicians, and Mathematics Education”, Bulletin（New series）of the american mathematical society, Volume 42, Number 4, 417-430.
Freudenthal, H. (1951) “Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie”, Math, Inst. Rijksuniv. to Utrecht.
Freudenthal, H. (1973) “Mathematics as an Educational Task”, Springer.
Freudenthal, H.（1991）“Revisiting Mathematics Education: China Lectures”, Kluwer Academic Publishers.
蟹江幸博（2009)「数学と教育の共同　－ハイマン・バスの挑戦－」、数理解析研究所講究録、第1657巻、23-73.
松岡学（2002)「完全順列の解法と集合の個数公式」、数研通信　No. 43, 数研出版、11-13.
塩見拓博（2007)「ハンス・フロイデンタールの数学化」、鳥取大学数学教育研究　vol. 9 no. 8.
内山秀紀、松岡学（2000)「さいころの問題と集合」、数研通信　No. 38, 数研出版、13-15.

The Teaching Materials Development of the Probability by the Way of an Idea of Sets for High School Mathematics

Faculty of Child Sciences, Department of Child Sciences
Manabu MATSUOKA

Abstract

When we solve a problem of the probability, the idea of sets may hide behind in the rear. The purpose of this study is to let high school students have a new field of vision for the probability by letting them be conscious of the way of sets. Firstly, as the concrete teaching materials, we consider the problem for the maximum and the minimum of the dice. Because the standard answer includes the part which slightly intuitive is hard to understand, we try the accurate explanation using the way of sets. Secondly, we consider the problem of the complete permutation. By using the way of sets, we perform the accurate description about the complete permutation, too. Next, we report a questionnaire result of the class practice. Finally, we show results and problems of the neighbourhood last.

Keywords: Probability, Sets, Dice, Complete permutation, Interest.