算数・数学科教員養成プログラムのための対比と一般化の過程に焦点をあてた教材

児童学部　児童学科　神林　信之

要旨：改訂学習指導要領の理念を具体化し、子どもたち一人一人に「生きる力」を育成するためには、その担い手である教師の力量形成および大学の教員養成の一層の充実が必要である。そして、小学校、中学校、高等学校等では題材のもつ数学的な価値を具体的に実現する授業が一層求められている。そのために大学の教員養成課程では学生が数学的に考えるよさに着目することができるような学習活動の組織が不可欠である。本稿では、その一環として、対比と一般化を手掛かりに開発した教材を３つ報告する。それは、①ある無限級数の和に関する教材、②空間を平面で分割する教材、そして、③２種類の追跡曲線についての教材である。

キーワード：教員養成、対比、一般化、数学的価値

１　はじめに

改訂学習指導要領の下での学校教育において、知識を単に知っているという段階からそれを活用できる段階へと学力の質を高め、子どもたちが将来、時々刻々生起し変化する課題に自らの経験や知識を活用して対応できる基盤を形成することが求められている。そのために、担い手である教師の力量形成、そして一方では、大学での教員養成の一層の充実が必要である[1]。

大学の教員養成において、初等中等教育で学んだ数学や数学教育思想の捉え直しをどのように具体化していくかは大きな課題であり、いろいろな試みがなされてきた[2) 3) 4)]。また、ここ数年間の研究には、教育実践研究（算数）の授業のあり方に関する考察（笠井、2008）[5]、教材開発の重要性を学生に認識させる「数学科教材研究」（池田、2009）[6]、算数科の実践的指導力を育てる大学の授業（石原、2009）[7]、教員養成課程学生への数学等に関する意識調査（宮内・寺嶋、2010）[8]、教師の目で算数の内容を捉えることに主眼をおいた大学の授業（神林、2011）[9] などがあり、成果と課題が報告されているが、教員養成や教師教育に関する知見等の蓄積は未だ十分とは言えない状況にある。

２　教材開発の方向と視点

太田ほか(2012)は、算数・数学科の授業者にとって必要なことは、自らを数学的活動を通して学び続ける立場に置くことであり、そのことは、子どもの数学的活動を把握し価値付けることと軌を一にするとしている[10]。そして、算数・数学科教員養成や現職教員研修において、学生や教員が数学的に考える過程に着目できるような教材及びその活用プログラム開発が必要であるとしている。

学習価値を顕在化するためには、価値ある教材の提示とともに、問題意識の喚起が必要である。問題意識は、２つの対象の間の関係や矛盾への着目により喚起される[11) 12)]。対象Ａに対する適切な対象Ｂを想定し、関係付けながら学習を進めることで、学習者の問題意識の喚起を促していくのであるが、対象Ａから見た対象Ｂは、既習内容に対する本習内容であったり、対比的・並列的な内容であったりと、様々な場合が考えられる。また、対象Ａ、対象Ｂそれぞれ自体が発展し、より一般化された数理が得られていくことが多い。このことを次のように図示することができる。

$$
\begin{array}{ccccccc}
\text{対象Ａ} & \xrightarrow{\text{一般化}} & \text{対象Ａ'} & \xrightarrow{\text{一般化}} & \text{対象Ａ''} & \xrightarrow{\text{一般化}} & \\
\updownarrow \text{対比} & & \updownarrow \text{対比} & & \updownarrow \text{対比} & & \\
\text{対象Ｂ} & \xrightarrow[\text{一般化}]{} & \text{対象Ｂ'} & \xrightarrow[\text{一般化}]{} & \text{対象Ｂ''} & \xrightarrow[\text{一般化}]{} &
\end{array}
$$

図１　対比的な２系列からなる教材

例えば、中学校３年生の「二次関数の定義・種類」の学習では、対象Ａが $y=ax$、対象Ａ’が $y=ax+b$、対象Ｂが $y=ax^2$、対象Ｂ’が $y=ax^2+bx+c$ と想定される。単元の導入では、身近に感じられる事象の中から関数

関係を見いだし、追究の対象を確定する活動を大切にし、床に正方形のパネルを並べる課題を扱う。そのことを通して、「最も特別な二次関数」と、その理解に必要となる他の「二次関数」「一次関数」を見いださせて、体系的な理解を促していく[13]。また、「相似な図形の面積比」の学習では、例えば相似比が 1:2 の長方形の面積比が対象Ａ、相似比が 1:2 の多角形の面積比が対象Ａ’、そして、相似比が 2:3 の長方形の面積比が対象Ｂ、相似比が 2:3 の多角形の面積比が対象Ｂ’と想定される。さらに、三角形や円の考察、1:3、2:5 などの相似比の場合の考察を加えることにより、相似な図形の場合、相似比さえ分かれば面積が求められるという面白さに気付かせていく[14]。

対象Ａ、対象Ａ’、対象Ｂ、対象Ｂ’等の学習の流れはいろいろな場合が想定される。対象ＡとＢを対比的に捉えた後でそれぞれの一般化を図る場合も考えられるし、Ａとその一般化であるＡ’を学習した後で初めてＢやＢ’の存在に着目する場合も考えられる。また、Ａ’を捉えた後で特殊化（または退化）したＡを押さえるという流れもあり得る。それは、学習内容とその位置付け、学習者の実態と授業者である教師の見とり等の要素により決定されていくものである。

さて、教員養成のための授業においては、新たな数理を見いだすことと同様に大切なのは、既習の知識や技能を総動員して体系的、論理的に調べることそのものである。A.J.Bishop(2005)の value clusters[15] で言えば、特に、合理性（Rationalism）、統制性（Control）、発展性（Progress）が現れるような学習活動である。

また、見いだした原理や見方を適用、活用して更に理解、習熟を図るための教材構成の方略は次のとおりである。まず、内容面から見たときに、「既習内容での場面を条件変更することによって発展的に追求できるとともに既習内容の本質を捉え直すことができる教材」や「習得した学習内容を総合的に見直すことができる教材」が有効である。次に、学習者とのかかわりの面から見たときに、「既習の学習で習得した内容を使って自分なりに追求できる教材」、「その学習者なりの妥当性や必要感に支えられての解釈や表現の仕方の違いが許容されたり生かされたりする教材」、「記号のレベルと経験のレベルを大きく往復運動しながら認識できる教材」、あるいは「繰り返し練習しながら、比喩的な表現や“わざ”言語を用いた発問・指示による分かり直しを通して技能の深まりがなされる教材」が有効である。更に、数学的リテラシー育成の面から見たとき、「数学的リテラシーの知性的側面、情動的側面、実践的側面のバランスを考慮した教材」が求められる[16]。

ここまでの考察に添った、算数・数学科教員養成系大学生向けの教材として試案として開発したのが、以下に述べる、①ある無限級数の和に関する教材、②空間を平面で分割する教材、③ 2 種類の追跡曲線についての教材である。

3　対比と一般化の過程に焦点をあてた教材

3－1　ある無限級数の和に関する教材

・問題Ａ

$$\int_0^{\Pi}(1\text{-}asinx\text{-}bsin2x)^2dx$$

の値が最小となるような、a、b の値を求めなさい。

解決の流れ

$$\int_0^{\Pi}(1\text{-}asinx\text{-}bsin2x)^2dx$$

$$=\int_0^{\Pi}\left(1\text{-}2asinx\text{-}2bsin2x+a^2sin^2x+2absinxsin2x+b^2sin^2 2x\right)dx$$

$$=\int_0^{\Pi}\left\{1\text{-}2asinx\text{-}2bsin2x+a^2(1\text{-}cos2x)/2+ab(cosx\text{-}cos3x)+b^2(1\text{-}cos4x)/2\right\}dx$$

$$=(\Pi\text{-}2a+b+\Pi a^2/2+\Pi b^2/2)\text{-}(2a+b)$$

$$=\frac{\Pi}{2}b^2+\frac{\Pi}{2}(a\text{-}\frac{4}{\Pi})^2+\Pi\text{-}\frac{8}{\Pi}$$

これより a=4/π、b=0 のとき、最小値π-8/πであることが分かる。

・問題Ａ’

$$\int_0^{\Pi}\{1\text{-}(a_1sinx+a_2sin2x+......+a_nsinnx)\}^2dx$$

の値を最小にする a_1、a_2、......、a_n の値を求めなさい。

解決の流れ

$$\{1 - (a_1sinx+a_2sin2x+......+a_nsinnx)\}^2$$

$$=(1 - \sum_{k=1}^{n}a_ksinkx)^2$$

$$=1 - 2\sum_{k=1}^{n}a_ksinkx+(\sum_{k=1}^{n}a_ksinkx)^2$$

$$=1 - 2\sum_{k=1}^{n}a_ksinkx+\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2sin^2kx+2\sum_{p<q}a_pa_qsinpxsinpx$$

であるから、

$$\int_0^{\Pi}\{1\text{-}(a_1sinx+a_2sin2x+......+a_nsinnx)\}^2dx$$

$$=\int_0^{\Pi} dx - 2\int_0^{\Pi}\sum_{k=1}^{n} a_k sinkxdx + \int_0^{\Pi}\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 sin^2 kxdx$$

$$+2\int_0^{\Pi}\sum_{p\neq q} a_p a_q sinpxsinqxdx$$

$$=\Pi+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}a_k - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}a_k + \frac{\Pi}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2$$

$$=\frac{\Pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{a_k+\frac{2}{\Pi}\left(\frac{(-1)^k}{k}-\frac{1}{k}\right)\right\}^2-\frac{4}{\Pi^2}\left(\frac{(-1)^k}{k}-\frac{1}{k}\right)^2\right]+\Pi$$

これより各 k が $a_k=-\frac{2}{\Pi}\left(\frac{(-1)^k}{k}-\frac{1}{k}\right)$ のとき与式は最小値 $\frac{\Pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{4}{\Pi^2}\left(\frac{(-1)^k}{k}-\frac{1}{k}\right)^2\right\}+\Pi$ をとることが分かる。

なお、この式で n=2 の場合を考え、k=1,2、そして与式の値を求めると先ほどの問題Aの結果に一致している。

・問題A”

n→∞ のとき与式の値Sはどうなるのか？

解決の流れ

関数空間 $L^2(0,\Pi)$ で $\left\{\sqrt{\frac{2}{\Pi}}sint, \sqrt{\frac{2}{\Pi}}sin2t, ...\right\}$ は正規直交系かつ完備（証略）なので、n→∞ でS→0である。そこで、最小値＝0とすると

これより $\sum_{k=odd}\frac{1}{k^2}=\frac{\Pi^2}{8}$ を得る。

・問題B’

$\int_{-\Pi}^{\Pi}\{x-(a_1sinx+a_2sin2x+......+a_nsinnx)\}^2\,dx$ の

の値を最小にする a_1、a_2、......、a_n の値を求めなさい。

解決の流れ

$$\{x-(a_1sinx+a_2sin2x+......+a_nsinnx)\}^2$$

$$=(x-\sum_{k=1}^{n}a_k sinkx)^2$$

$$=x^2-2\sum_{k=1}^{n}a_k xsinkx+(\sum_{k=1}^{n}a_k sinkx)^2$$

$$=x^2-2\sum_{k=1}^{n}a_k xinkx+\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2 sin^2 kx+2\sum_{p<q}a_p a_q sinpxsinqx$$

したがって、

$$\int_{-\Pi}^{\Pi}\{x-(a_1sinx+a_2sin2x+......+a_nsinnx)\}^2\,dx$$

$$=\frac{2\Pi^3}{3}+\Pi\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2+4\Pi\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}a^k$$

$$=\Pi\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k{}^2+4\times\frac{(-1)^k}{k}a_k\right\}+\frac{2}{3}\Pi^3$$

$$=\Pi\sum_{k=1}^{n}\left\{(a_k+2\times\frac{(-1)^k}{k})^2-\frac{4}{k^2}\right\}+\frac{2}{3}\Pi^3$$

したがって各 k で $a_k=-\frac{2(-1)^k}{k}$ のとき与式は、最小値 $\frac{2}{3}\Pi^3-4\Pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ をとることが分かる。

・問題B”

n→∞ のとき与式の値Tはどうなるのか？

解決の流れ

さきほどと同様に考え、n→∞ で T→0 である。

そこで $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\alpha$ として上の式＝0とすると、

$\frac{2}{3}\Pi^3-4\Pi\alpha=0$ これを解いて $\alpha=\frac{\Pi^2}{6}$

こうしてよく知られている関係である

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ ......\ =\frac{\Pi^2}{6}$ を得る。

・問題B

$\int_{-\Pi}^{\Pi}(x-asinx-bsin2x)^2\,dx$

の値を最小にする a_1、a_2、......、a_n の値を求めなさい。

解決の流れ

問題Aと同様に考える。a=2 、 b=-1 のとき、最小値

$\Pi(\frac{\Pi^2}{3}-\frac{5}{2})$ となる。

・考察

単独の問題を解くだけでなく、今回のように次々と問題場面を得ていくことで、最初の問題場面の意味が明らかになる。今回の一連の教材を関数の近似という観点から捉えた場合、問題A系列と問題B系列とは偶関数と奇関数の対比であった。それとは別に、sin を cos にする対比による問題系列の組織も可能である。

また、振り返ると、思わぬところで $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ \ldots\ldots$

がでてきて、意外性があり、しかもその級数の和が π に密接に関連していることが自然な形で分かる教材である。

３－２　空間を平面で分割する課題

・問題Ａ

平面を n 本の直線で分ける。ただし、どの直線も同一の点を通るとする。いくつの部分に分割されるか。

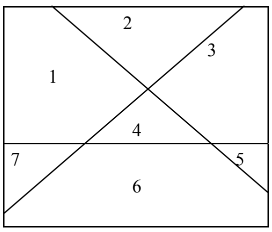
解決の流れ

直線が１本の時平面は２つの部分に分割される。２本では４つに、３本では６つに分割される。n 本では 2n 個の部分になる。即ち　$f(n)=2n$

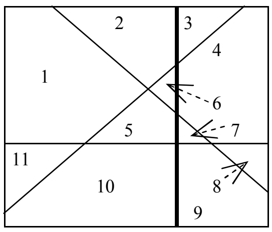
・問題Ｂ

平面を n 本の直線で分ける。最大でいくつの部分に分割されるか。

解決の流れ



3 本の場合



4 本の場合

４本目の直線を入れると、前の３本の直線と３点で交わるから、付け加えた１本の直線は４つの部分（線分または半直線）に分かれる。このとき平面の部分の増加数は４（3+1）個。つまり、$f(4)=f(3)+4$ と表せる。同様に考えると、$f(k+1)=f(k)+(k+1)$ を得る。

$k=1,2,\ldots,n-1$ を代入して辺々加えると、

$f(n)=n+(n-1)+\ldots\ldots+2+f(1)$

いま、$f(1)=2$ なので　$f(n)=(n^2+n+2)/2$

・問題Ａ’

空間を n 個の平面で分割する。どの平面も同一の点を通る（ただし、単純になりすぎないよう、３つ以上の平面が同一の直線を含まないとしておく）とき、空間はいくつの部分に分けられるか。

解決の流れ

k 個の平面で $f(k)$ 個に分けたとする。

$f(1)=2$ 、 $f(2)=4$ は自明。

$k=3$ のとき、第３の平面は既にある２つの平面と交わる。この平面上に２本の交線ができ、この平面は４つの部分に分けられその各部分は空間を２つに分けるから、結局空間の部分は４（2×2）つ増える。

だから $f(3)=8$ 、 また $f(3)=f(2)+4$

同様に考えて　$f(k+1)=f(k)+2k$

$k=1,2,\ldots\ldots,n-1$ とおいて辺々加えて

$f(n)=f(1)+2\ \{1+2+\ldots\ldots+(n-1)\}$

いま $f(1)=2$ だから　$f(n)=n^2-n+2$

・問題Ｂ’

空間を n 個の平面で分けると最大いくつに分割されるか。

解決の流れ

$f(1)=2$ 、 $f(2)=4$ は明らか。

いま、k 個の平面が交わっている空間に k+1 番目の平面を入れたとき、この平面は k 個の平面と必ず交わり、その交線は k 本できる。この k 本の交線は k+1 番目の平面を $(k^2+k+2)/2$ の部分に分ける。（∵問題Ｂ）

したがって、$f(k+1)=f(k)+(k^2+k+2)/2$ となり、階差 $g(k)=f(k+1)-f(k)$ を利用して $f(n)$ を求めると、

$f(n)=2+(n^3+5n-6)/6=(n^3+5n+6)/6$

・考察

$f(k+1)$ と $f(k)$ 間の漸化式および一般項 $f(n)$ をまとめると次のようになる。

問題Ａ	問題Ａ’
$f(k+1)=f(k)+2$	$f(k+1)=f(k)+2k$
$f(n)=2n$	$f(n)=n^2-n+2$
問題Ｂ	問題Ｂ’
$f(k+1)=f(k)+(k+1)$	$f(k+1)=f(k)+(k^2+k+2)$
$f(n)=(n^2+n+2)/2$	$f(n)=(n^3+5n+6)/6$

ここで空間の次元を n、「平面」の枚数を k として、分けられる最大部分の個数を $f(n,k)$ とすると、$f(2,k+1)=f(2,k)+f(1,k)$、$f(3,k+1)=f(3,k)+f(2,k)$ が成り立っている。このことから類推すると４次元空間に関する次の予測が立てられる。$f(4,k+1)=f(4,k)+f(3,k)$

問題Ａ”　　$f(k+1)=f(k)+(k^2-k+2)$

問題Ｂ”　　$f(k+1)=f(k)+(k^3+5k+6)/6$

これを更に一般化すると、n 次元空間の分割に関して漸化式 $f(n,k+1)=f(n,k)+f(n-1,k)$ が成り立つという予

測を得ることができる。

３－３　２つの追跡曲線について

身の周りの事象には､一方が他方に引っ張られたり､追いかけたりする例（飼い主と犬、２匹のトンボ、兄と弟など）が多く見られる。単純化したいくつかの例を考察する。ここで次の状況を考える。

状況Ａ

点Ｐは原点(0,0)を出発して等速でｙ軸上を正の方向に進む。点ＱはＰと同時に点(1,0)を出発してＰと同じ速さで常にＰに向かって（Ｐを正面に見ながら）進む。このときの点Ｑの軌道を「追跡曲線Ａ」とする。

状況Ｂ

点Ｐは原点(0,0)を出発して等速でｙ軸上を正の方向に進む。点ＱはＰと同時に点(1,0)を出発してＰＱ＝1を保ちながら（伸びないロープで引かれながら）進む。このときの点Ｑの軌道を「追跡曲線Ｂ」とする。

・問題Ａ

追跡曲線Ａの式を求めなさい。

解決の流れ

点Ｑでの接線の方程式は、

$y\text{-}f(a)=f'(a)(x\text{-}a)$

$\therefore \mathrm{P}(0,-af'(a)+f(a)$

曲線CQ=OPだから

$$\int_a^1 \sqrt{1+\{f(x)\}^2}\,dx=-af'(a)+f(a)$$

$$\frac{d}{da}\int_a^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\frac{d}{da}\{-af'(a)+f(a)\}$$

$$-\sqrt{1+\left\{f'(a)^2\right\}}=-\{f'(a)+af''(a)\}+f'(a)$$

したがってこの曲線は微分方程式

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{x}$$ を満たすことが分かる。

$y'=g(x)$とおいて両辺をｘについて積分する。

左辺は、

$$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1+\{g(x)\}^2}}dx$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{1+X^2}}dX$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{1\text{-}t^2}}}\frac{1}{(1\text{-}t^2)\sqrt{1\text{-}t^2}}dt$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{1\text{-}t^2}}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1\text{-}t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}log\frac{1+t}{1\text{-}t}$$

一方、右辺は、

$$\int\frac{1}{x}dx$$

$$=logx$$

したがって、$log\frac{1+t}{1\text{-}t}=logx^2$

これより、$x\text{-}y'=\sqrt{y'^2+1}$

$$2x\frac{dy}{dx}=x^2\text{-}1$$

$$\int dy=\int\left(\frac{1}{2}x\text{-}\frac{1}{2}\frac{1}{x}\right)dx$$

$$y=\frac{1}{4}x^2\text{-}\frac{1}{2}logx\text{-}\frac{1}{4}\ (0<x\leqq 1)$$

・問題Ｂ

追跡曲線Ｂの式を求めなさい。

解決の流れ

$y=f(x)$とすると、$f'(x)=-\frac{\sqrt{1\text{-}x^2}}{x}$となることより、

$y=log\frac{1+\sqrt{1\text{-}x^2}}{x}\text{-}\sqrt{1\text{-}x^2}\ (0<x\leqq 1)$　を得る。

これは、不定積分の公式を使ってもよいし、次のように計算してもよい。

$y=-\frac{\sqrt{1\text{-}x^2}}{x}$　ここで　$x=sin\theta$　とおく。

$$-\int ydy=\int\frac{cos^2\theta}{sin\theta}d\theta$$

$$=\int\frac{1\text{-}sin^2\theta}{sin\theta}d\theta$$

$$=\int\left(\frac{1}{sin\theta}\text{-}sin\theta\right)d\theta$$

$$=logtan\frac{\theta}{2}+cos\theta$$

$$=log\frac{1\text{-}\sqrt{1\text{-}sin^2\theta}}{sin\theta}+\sqrt{1\text{-}sin^2\theta}$$

$$=log\frac{1\text{-}\sqrt{1\text{-}x^2}}{x}+\sqrt{1\text{-}x^2}$$

ここで、x=1のときy=0であるから、

$-y = log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+\sqrt{1-x^2}$ となる。これより、

$y = log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+\sqrt{1-x^2}$ が得られる。

ここまでの計算で追跡曲線Aと追跡曲線Bは異なる曲線らしいことが分かる。値の比B／Aの近似値を調べてみると次のようになる。(ただし、$0.0^31=0.0001$)

x	A	B	B/A
0.9	0.00518	0.03126	6.03475
0.8	0.02157	0.09318	4.31989
0.7	0.05084	0.18145	3.56904
0.2	0.56472	1.31264	2.32441
0.1	0.90379	1.99824	2.21096
0.01	2.05261	4.29834	2.09409
$0.0^{10}1$	12.41422	25.02158	2.01556
$0.0^{30}1$	35.44007	71.07329	2.00545
$0.0^{90}1$	104.51762	209.22840	2.00185

x→ 0 で B/A→ 2 と予想される。

$$\lim_{x\to 0}\frac{log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}-\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{4}x^2-log\sqrt{x}-\frac{1}{4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-\left\{-x^2-(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}+x^2(1+\sqrt{1-x^2}\right\}}{\left\{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}\right\}(x^2-1)}$$

$$=\frac{2^\times(-2)}{(2^\times1)^\times(-1)}$$

$$=2$$

問題A'、問題B'および解決の流れ

一般化して、点(a、0)から出発するとこの追跡曲線A'は、 $y=\frac{x^2}{4a}-\frac{a}{2}log(\frac{x}{a})-\frac{a}{4}$ である。

また、追跡曲線B'は、

$y=alog\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sqrt{a^2-x^2}$ となる。

問題A"解決の流れ

問題A'を更に一般化して、PとQの速さが等しくない状況を作ってみる。Pの速さを u、Qの速さを v とし、k=u/v とすると、k≠1 のときは、

$y=\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{k+1}(\frac{x}{a})^{k+1}-\frac{1}{1-k}(\frac{x}{a})^{-k+1}\right\}+\frac{ka}{1-k^2}$ となる。

・考察

初発の問題意識は「追跡曲線Aと追跡曲線Bは同じ曲線を描くだろうか、それとも異なる曲線を描くだろうか」であった。学生は既習内容を総動員して調べていく中で、計算に習熟しながら新たな数理を発見することができる。B/A の極限値が有限確定値であること、そしてそれが（π や $\sqrt{3}$ などではなく）なぜ「２」なのかという不思議さを感じることもできる教材である。

追跡曲線Aはいわゆるパシュートカーブであり、追跡曲線Bはトラクトリクスである。パシュートカーブは現実世界への応用（うさぎと犬、２つの飛行機等）も多い。また、正方形の４つの頂点から出発する犬の軌跡が等角螺旋になるなど、図案としての話題も豊富である[17]。一方、トラクトリクスは図形的な面白さに満ちている。例えば、トラクトリクスはカテナリー（一様な鎖をつるしたときの形）の伸開線であり、カテナリーはトラクトリクスの縮閉線である。トラクトリクスの長さは無限であるが、トラクトリクスと漸近線の間の領域の面積は有限である。

4 おわりに

算数・数学科教員養成プログラムのための対比と一般化の過程に焦点をあてた教材の在り方を考察した。

教材開発においては、A.J.Bishop（2005）の価値クラスター、神林（2011）の教材構成の方略を手掛かりにした。開発された問題系列は、学生が問題解決していく中で次々と新たな問題場面が現れてくるとともに、一連の問題解決後に振り返ったときにも新たな気付きが生じることが期待できるもので、その中から本稿では、①ある無限級数の和に関する教材、②空間を平面で分割する教材、③２種類の追跡曲線ついての教材の３つを提案した。

引用・参考文献

1) 神林信之「『実践と理念との間をうめ』ることのできる学部」平成 22 年度新潟大学教育学部「フレンドシップ事業」（第 12 年次）報告書「教育を受ける側から教育を行う側への姿勢・視点の転換」. 2011 年. 217-218 頁。

2) 佐藤英二「数学科の教師教育におけるケースメソッドの開発」日本数学教育学会第 35 回数学教育論文発表会論文集. 2002 年. 651-652 頁。

3) 吉川行雄「教材開発の事例集」科学研究費報告書. 2002 年。

4）太田伸也「教員養成課程の学生の数学のとらえ方についての一考察」科学研究費報告書．2004 年。

5）笠井健一「教職教育科目『教育実践研究（算数）』の授業のあり方についての一考察」日本数学教育学会第 41 回数学教育論文発表会論文集. 2008 年. 943-944 頁。

6）池田文男「数学的活動に基づく中等数学の教材開発」日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集．2009 年．709-714 頁。

7）石原直「教員養成における算数科の実践的指導力を育てるための一考察」日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集．2009 年．937-938 頁。

8）宮内香織・寺嶋浩介「教員養成課程の学生の数学恐怖症・PC アレルギーに関する意識調査(4)」日本数学教育学会第 43 回数学教育論文発表会論文集．2010 年．777-782 頁。

9）神林信之「平成 23 年度『小学校算数』の構想と実際」日本数学教育学会第 44 回数学教育論文発表会論文集．2011 年．909-914 頁。

10）太田伸也・中野博之・昆正博・山形昌弘・伊藤成治・西澤道知「数学的に考える過程に焦点をあてた教員養成及び現職教員研修プログラムのための教材と実践事例」平成 21 年度～平成 23 年度科学研究費補助金基盤研究(C)報告書．2012 年。

11）金子忠雄ほか『学びの数学と数学の学び』明治図書出版．2002 年。

12）藤澤伸介『ごまかし勉強』新曜社．2002 年。

13）井口浩「関数 $y=ax^2$ の教材解釈・構成」『教えたくなる数学　学びたくなる数学』考古堂．2012 年．152-159 頁。

14）渡部智和「相似な図形の教材解釈・構成」『教えたくなる数学　学びたくなる数学』考古堂. 2012 年. 116-123 頁。

15）Bishop,A.J.,Numeracies,mathematics and values - a cultural perspective, 国際教育協力シンポジウム「教育の質的改善への課題」(主催:筑波大学教育開発国際協力研究センター、CRICED)、2005.1.23. A.J.Bishop は数学的価値を 6 つの価値クラスター(six value clusters)で整理している。それらは、合理性（Rationalism）、経験性（Empiricism）、統制性（Control）、発展性（Progress）、開放性（Openness）、神秘性（Mystery）である。合理性(Rationalism)とは、根拠を明らかにして論理的な説明に価値をおく考え方であり、経験性(Empiricism)とは、実験や実測など実物を調べることに価値をおく考え方である。統制性(Control)とは、習得した知識や技術に対する安心感であり、発展性(Progress)とは、理論を見いだしたり発展させたりできるという動的な感情である。開放性(Openness)とは、数学的知識が他の人々との共有を重視することであり、神秘性(Mystery)とは、数学的知識の抽象性や神秘性を重視することである。

16）神林信之『教材構成の力を鍛える』晃洋書房．2011 年 156-157 頁、204 頁。

17）宮崎興二・藤井道彦・日置尋久・山口哲『不思議おもしろ幾何学事典』朝倉書店．2002 年．112-113 頁。

Arithmetic and Mathematics Teacher Training Programs: Teaching Materials Focusing on Comparing and Generalizing

Faculty of Child Sciences, Department of Child Sciences
Nobuyuki KAMBAYASHI

Abstract

Teachers are the leaders for implementing the Revised Course of Study and developing each child's zest for life. Teachers need better skills development and university training. In addition, recitations at schools, including elementary, junior high and senior high schools, are increasingly required to concretely establish mathematical values.

In order to achieve the above, teacher training programs at universities must organize learning activities to focus student attention on the advantages of mathematical thinking. As part of this, this article discusses the following teaching materials that were developed using comparison and generalization to help guide students:

1. On the sum of an infinite series
2. On space division by planes
3. On two types of pursuit curves

Keywords : Teacher training, comparison, generalization, mathematical values