大阪樟蔭女子大学　人間科学　研究紀要　第１号

行動特性の人格構造的解明への多変量解析的アプローチ（Ⅰ）

—合成得点の信頼性—

藤　村　和　久

Multivariate analytical approach to elucidating personality structural interrelations between behavioral traits (I)

— Reliability of Composites —

Kazuhisa Fujimura

Abstract: The coefficient α is widely used as reliability coefficient of internal consistency of constructed scale to measure behavioral trait by many researchers. However, there seems to be some cases in which it is wrongly used. This is caused by confusion of internal consistency with homogeneity or unidimensionality. One of purposes of this paper is to introduce some multidimensional methods to construct reliable scales and the method of constructing scales through the principle of factor-trueness. Another one is to argue that on the basis that factors are constructs respecively drawn from psychological data through factor analysis, so the scale with sufficient factorial validity can be said to have construct validity and the problem of reliability ultimately amounts to construct validity. Moreover, to make psychological function of behavioral traits evident in this personality domain, it is very important to confirm the structural interrelations between these behavioral traits

Key words: reliability of composite, coefficient α, homogeneity of scale, factorial validity, multivariate analysis

索引語：合成得点の信頼性，α係数，尺度の等質性，因子的妥当性，多変量解析

はじめに

性格に関する最古の書物といわれる，テオフラストスによる，邦訳名「人さまざま」（森進一訳　岩波文庫）には，数多くの人物像が鮮やかに描き出されている。人はいろいろな状況で異なった行動をとるが，これらの行動の観察を通じて，状況を超えて個人の行動にある程度一貫した傾向を見出すことができる。これが，あの人は「神経質な人」とか，「攻撃的な人」といった，その個人の特徴として周囲に認識される。このように，個人の個々の行動の背景にある，ある程度一貫した行動傾向のことを特性という概念で呼んでいる。Allport（1937；詫摩他訳，1982，p.270）は，特性を「行動の中の観察可能な別々の

行動が一貫していることを示すのに必要とされる推論を通してのみ見出されるのである」として，個人の諸行動の中にみられる一貫した傾向を概念化したものとして考えている。また，Krahé（1992）は特性の一般的な特徴として，

① 同一あるいは類似の状況に対する反応が，人によって異なることを説明する概念として用いられる。

② 人の行動はある種の潜在的，内的気質の働きによって時間的，通状況的な一貫性を示すと仮定される。

③ 特性概念に基づく研究は，特性評価という形のパーソナリティ検査を行い，データ解析には相関分析法を用いるなど典型的な特徴がある。

を挙げた。特性は，このように“個々の状況に応じて生じる個人の行動の中にある一貫した行動傾向”として認識される概念である。特性概念は主に性格研究のなかで大きく展開されてきたが，性格領域以外のパーソナリティ領域における行動傾向としての特性概念を一般化して，ここでは行動特性と呼ぶことにする。ここでいう行動とは，身体の動きといった狭い意味のものではなく，感情や情緒，動機，意識，価値観，性格，集団や社会的場面における行動，あるいは記憶や思考といった知的行動など人間の営み全般を意味する。これらの諸要素が人格的に統合されて，個人の行動を特徴ならしめるものといえる。個人のこのような特徴は，その時々の状況や環境における個人の適応的なあり方であり，人格発達的に形成されてきたものである。これが類似の状況や環境における個人の行動を一貫ならしめるものといえる。何故なら，もし個人の行動がでたらめに生じたり，状況に完全に依存して生じるなら，自我の安定を得ることが困難となり，適応が成り立ち得ないことは容易に想像がつくからである。また測定論的には，個人の人格変数を測定しようとしても実際は状況変数あるいは環境変数を扱うことになり，人間のパーソナリティには個人差がないという矛盾に突き当たってしまうからである。

心理学研究は多数の個人の観察から共通に見られる行動特徴を概念化し，その概念を表す変数を構成し，変数間の関係を通じて人間行動の法則性を見出そうとするものである。そのためには，Eysenck & Eysenck（1969）がいう個別反応水準の行動を測定対象にするより，より一貫性の高い行動水準を測定対象として変数化し，変数間の関係へと積み上げていく方が望ましい。

わが国における多数の心理学研究においても知能や性格をはじめ心理学におけるさまざまな概念を測定すべくテストや尺度が構成され，人間行動の法則性の解明に大きく寄与してきた。堀・山本（2001），堀・吉田（2001），堀・松井（2001）は，堀・松井・山本（1994）をより発展させ，国内で公表された知能や発達以外の心理測定尺度を網羅し，ジャンル別に分類し，その作成過程，信頼性，妥当性，尺度の特徴，採点方法，文献等について整理し紹介している。これらによると，構成尺度の多くが信頼性係数としα係数を用いており，また尺度を構成する項目数も数項目から二十数項目に至るものもあり様々である。また作成手続きも様々であり，α係数の値だけで尺度の信頼性を論ずるわけにはい

かない問題も含んでいる。

心理学的測定のほとんどは心理学的構成概念を測定対象とするところにその特徴がある。その為，測定の構成概念的妥当性が問題とされなければならないが，それは測定が如何に個人の特徴を正確に捉え得るかという信頼性（reliability of measurement）が前提とならなければならないことはいうまでもないことである。本論文では，まず，測定尺度の信頼性，つまり合成得点の信頼性（reliability of composites）の問題について論じる。

1. 測定の信頼性

1. 1 測定値と真値，誤差の統計的関係

個人 i の測定 j による測定値を X_{ij}，真値を T_{ij}，誤差を E_{ij} とすると，測定値 X_{ij} は，

$$X_{ij}=T_{ij}+E_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,N;j=1,2,\cdots,n) \tag{1. 1}$$

と表される。X_{ij} は，個人 i に同一測定を n 回繰り返したときの j 回目の得点と考えてもよいし，個人 i に n 個の測定を実施したときの測定 j の得点とみなしてもよい。真値は，完全な測定用具で理想的な状態で測定されたときの個人得点，あるいは個人 i に同じ測定 j を独立に無限に繰り返すことができるとき，その測定値の平均値と考えられる (Guilford, 1954)。また，E_{ij} は真値からの誤差である。しかし，実際の測定では，同一個人に同じ測定を独立に無限回繰り返すことは不可能である。いずれにしても（1. 1）式は理念的なモデルであり，真値や誤差が実際にはいかほどの値を持つかは統計的な推定によらざるを得ない。ここでは，データ数 N が十分に大きい場合の集団の統計量について考える。このとき，誤差は個人間において独立に生じるものとすると，誤差について次のような仮定が成り立つ。

（1）$\overline{E}=0$　：　誤差の平均はゼロである。

（2）$\rho_{TE}=0$　：　真値と誤差の相関（共分散）はゼロである。

（3）$\rho_{E_jE_k}=0$　：　異なる測定間の誤差の相関（共分散）はゼロである。

仮定（1）から，測定値の平均は真値の平均値に等しい（$\overline{X}=\overline{T}$)。次に，測定値の分散（以後全分散という）$\sigma_X^2$ は仮定（2）から，

$$\sigma_X^2=\sigma_T^2+\sigma_E^2 \tag{1. 2}$$

となり，真値の分散（以後真分散という）と誤差の分散（以後誤差分散という）の和となる。また，異なる測定値間の共分散は仮定（1）～（3）から，

$$\sigma_{X_jX_k}=\sigma_{T_jT_k} \tag{1. 3}$$

となり，測定値間の共分散は真値間の共分散に等しい。

また，測定値と真値との共分散 $\sigma_{X_jT_j}$ は，

$$\sigma_{XT}=\sigma_T^2 \tag{1. 4}$$

となり，真分散に等しい。

1.2 信頼性の理論的定義

信頼性は，理論的には測定の全分散 $\sigma^2_{X_j}$ に占める真分散 $\sigma^2_{T_j}$ の比によって表される。すなわち，信頼性係数を ρ_{XX} とすると，

$$\rho_{XX}=\frac{\sigma^2_T}{\sigma^2_X}=1-\frac{\sigma^2_E}{\sigma^2_X} \tag{1. 5}$$

と表現される。また，(1. 5) 式より，

$$\sigma_E=\sigma_X\sqrt{1-\rho_{XX}} \tag{1. 6}$$

が得られ，これを標準誤差（standard error）という。

次に，測定値と真値との相関は，(1. 4) 式より，

$$r_{XT}=\frac{\sigma_{XT}}{\sigma_X\sigma_T}=\frac{\sigma_T}{\sigma_X} \tag{1. 7}$$

となる。これを信頼性指数（index of reliability）という。さらに (1. 7) 式の両辺を 2 乗すると，

$$r^2_{XT}=\frac{\sigma^2_T}{\sigma^2_X}=\rho_{XX} \tag{1. 8}$$

となり，信頼性係数は真値から測定値を推定するときの決定係数であることが解る。

また，異なる測定値の真値間の相関 $\rho_{T_jT_k}$ は，(1. 3) 式および (1. 5) 式から，

$$\rho_{T_jT_k}=\frac{\sigma_{T_jT_k}}{\sigma_{T_j}\sigma_{T_k}}=\frac{\sigma_{X_jX_k}}{\sigma_{T_j}\sigma_{T_k}}=\frac{\sigma_{X_j}\sigma_{X_k}\rho_{X_jX_k}}{\sigma_{T_j}\sigma_{T_k}}=\frac{\rho_{X_jX_k}}{\sqrt{\rho_{X_j}}\sqrt{\rho_{X_k}}} \tag{1. 9}$$

となる。観測値間の相関は真値間の相関よりも小さいことがわかる。このことを相関の希薄化（attenuation）と呼び，(1. 9) 式を希薄化の修正公式と呼ぶ。

1.3 合成得点と項目得点の真値，誤差の統計的関係と信頼性係数

いま，N 人の被験者に対して n 個の測定を行ったとき $(N\geq n)$，個人 $i\ (i=1,2,\cdots,N)$ の n 個の測定値による合成得点 X_i は，

$$X_i=x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{in} \tag{1. 10}$$

である。合成得点の真値を T_i，誤差を E_i，各測定値の真値を t_{ij}，誤差を e_{ij} と表記すると，

$$T_i=t_{i1}+t_{i2}+\cdots+t_{in} \tag{1. 11}$$

$$E_i=e_{i1}+e_{i2}+\cdots+e_{in} \tag{1. 12}$$

となる。ところで，合成得点の平均値 $\overline{X}$ および分散は，それぞれ，

$$\overline{X}=\sum_{j=1}^{n}\overline{x}_j \tag{1. 13}$$

$$\sigma^2_X=\sum_{j=1}^{n}\sigma^2_{x_j}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{x_jx_k} \tag{1. 14}$$

となり，合成得点の分散は n 個の測定間の分散・共分散の総和である。

同様にして，合成得点の真分散は，

$$\sigma_T^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_{t_j}^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{t_j t_k}=\sum_{j=1}^{n}\rho_{x_j}\sigma_{x_j}^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{x_j x_k} \tag{1.15}$$

となる。また，誤差の分散は，

$$\sigma_E^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_{e_j}^2=\sum_{j=1}^{n}(1-\rho_{x_j})\sigma_{x_j}^2 \tag{1.16}$$

となり，各測定の分散の和に等しい。したがって，合成得点 X の信頼性係数 ρ_X は，(1. 5)，(1. 15)，(1. 16) 式から，

$$\rho_X=\frac{\sum_{j=1}^{n}\rho_{x_j}\sigma_{x_j}^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{x_j x_k}}{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{x_j}^2+\sum_{j-1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{x_j x_k}}=1-\frac{\sum_{j=1}^{n}(1-\rho_{x_j})\sigma_{x_j}^2}{\sigma_X^2} \tag{1.17}$$

で求められる（池田，1994）。

1.4　信頼性係数（coefficient of reliability）の推定

信頼性係数は理論的には（1. 5）式によって定義される。信頼性係数を求めるには，真分散または誤差の分散が分からなければならない。しかし，個人 i の測定 j における真値は，先述のように，「N 人の個人に測定 j を全く独立に無限回（実際には多数回）繰り返し測定することができるときの平均値」とされるが，実際的には，同一被験者に同一テストを“独立に”繰返すことは困難である。そこで，同じ特性を測ると見なされる多数の項目を同一被験者群に実施して，集団全体の統計量として信頼性係数を推定する方法が一般的に用いられる。この方法の問題点は，被験者集団の特性によって統計量が影響を受けることである。たとえば，尺度構成時の信頼性係数と，構成された尺度を他の集団に適用したときの信頼性係数が異なることもあり得るのである。いずれにしても多くの心理学研究において測定尺度が用いられ，尺度得点と他の心理学変数との関係を通じて行動の法則性を明らかにしようとすることが行われている。

2.　合成得点の信頼性係数

2.1　α 係数

いま，個人 $i\,(i=1,2,\cdots,N)$ の n 個の項目得点からなる合成得点を X_i とすると，

$$X_{ij}=x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{in}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij} \tag{2.1}$$

と表記することができる。合成得点の平均 $\overline{X}$ および分散 σ_X^2 は，それぞれ，

$$\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\overline{x}_j \tag{2.2}$$

$$\sigma_X^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-\sum_{j=1}^{n}\overline{x}_j\right)^2$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_j x_k}=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{x_j x_k} \qquad (2.3)$$

である。いま，1変量あたりの平均分散に対する平均共分散を考え，それぞれ，

$$\overline{\sigma}_x^2=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_j x_k},\quad \overline{\sigma}_{x_j x_k}=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{x_j x_k}$$

を定義する。そして，平均分散に対する平均共分散の比をCronbachの α 係数（Cronbach, 1951）という（池田，1973；Feldt & Brennan, 1989)。

$$\alpha=\frac{\overline{\sigma}_{x_j x_k}}{\overline{\sigma}_x^2}=\frac{\frac{1}{n(n-1)}\left(\sigma_X^2-\sum_{j=1}^{n}\sigma_{x_j}^2\right)}{\frac{1}{n^2}\sigma_X^2}=\frac{n}{n-1}\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{x_j}^2}{\sigma_X^2}\right) \qquad (2.4)$$

（2.4）式は次のKuder-RichardosonのKR-20式

$$\rho_{XX}=\frac{n}{n-1}\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j(1-p_j)}{\sigma_X^2}\right) \quad \text{(KR-20)}$$

を一般化したものである。右辺の p_j は項目が二値データ（1 or 0）のとき，項目 j が1をとる比率であり，したがって $p_j(1-q_j)$ は項目 j の分散である。

α 係数は項目間の整合性を表す信頼性係数として用いられ，項目間の共分散が全て等しいという仮定の元に推定される信頼性係数である。言い換えるならば，α 係数は項目得点が τ（タウ）等価であるという前提に基づいて導出されるものである（Novick & Lewis,1967)。

2.2 α 係数は信頼性の下限

Novick & Lewis（1967）は，α 係数が合成得点の信頼性の下限であることを次のように証明した。

合成得点 X_i の真値 T_i が（2. 11）式によって表されるとき，測定値 j，k の真値の差の分散は，

$$\sigma_{t_{j-k}}^2=\sigma_{t_j}^2+\sigma_{t_k}^2-2\sigma_{t_j t_k} \qquad (2.5)$$

である。分散の性質から（2. 5）は，

$$\sigma_{t_j}^2+\sigma_{t_k}^2\geq 2\sigma_{t_j t_k} \qquad (2.6)$$

が成り立つ。n 個の測定値の全ての組み合わせについて，差の分散の総和を考えると，

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\left(\sigma_{t_j}^2+\sigma_{t_k}^2\right)\geq 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{t_j t_k} \tag{2.7}$$

が成り立つ。ところで，

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_{t_j}^2+\sigma_{t_k}^2\right)=n\sum_{j=1}^{n}\sigma_{t_j}^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{t_k}^2=2n\sum_{j=1}^{n}\sigma_{t_j}^2 \tag{2.8}$$

である。また，(2. 8) 式左辺は，

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_{t_j}^2+\sigma_{t_k}^2\right)=2\sum_{j=1}^{n}\sigma_{t_j}^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\left(\sigma_{t_j}^2+\sigma_{t_k}^2\right) \tag{2.9}$$

とも表される。(2. 8) 式，(2. 9) 式から，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\left(\sigma_{t_j}^2+\sigma_{t_k}^2\right)&=2n\sum_{j=1}^{n}\sigma_{t_j}^2-2\sum_{j=1}^{n}\sigma_{t_j}^2\\&=2(n-1)\sum_{j=1}^{n}\sigma_{t_j}^2\end{aligned} \tag{2.10}$$

となる。(2. 7) 式より，

$$2(n-1)\sum_{j=1}^{n}\sigma_{t_j}^2\geq 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{t_j t_k} \tag{2.11}$$

なる関係が得られ，これより，

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{t_j}^2\geq\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{t_j t_k} \tag{2.12}$$

ところで，合成得点の真分散は (2. 15) 式より，

$$\sigma_T^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_{t_j}^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{t_j t_k}$$

である。右辺第 1 項に (2. 12) 式を代入して，

$$\sigma_T^2\geq\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{t_j t_k}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{t_j t_k}$$

あるいは，

$$\sigma_T^2\geq\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{t_j t_k} \tag{2.13}$$

が成り立つ。ところで，合成得点の分散は (2. 14) 式より，

$$\sigma_X^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_{x_j}^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{x_j x_k}$$

である。(2. 2) 式の性質，すなわち「測定値間の共分散は真値間の共分散に等しい」という性質を用いて，

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_{t_j t_k}=\sigma_X^2-\sum_{j=1}^{n}\sigma_{x_j}^2 \tag{2.14}$$

これを (2. 13) 式に代入して，

$$\sigma_T^2 \geq \frac{1}{n-1}\left(\sigma_X^2 - \sum_{j=1}^{n}\sigma_{x_j}^2\right) \tag{2.15}$$

信頼性の公式（2. 5）より，

$$\rho_{XX} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2} \geq \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{x_j}^2}{\sigma_X^2}\right) \tag{2.16}$$

が得られる。全ての項目得点が τ 等価であるとき，α 係数は合成得点の信頼性係数に一致することを表している。

3. 尺度の内的整合性（internal consistency）と等質性（homogeneity）

Cronbach（1951）がテスト（測定尺度）の内的整合性を示す信頼性係数として，Kuder-RichardsonのKR-20式を α 係数として一般化して以来，わが国においても内的整合性を表す指標として多く用いられるようになった。ここでは，α 係数の示す内的整合性と項目の等質性について考える。

Lord & Novick（1968, p.95）はテストを構成する個々の項目が本質的に τ 等価であるとき，すなわち全項目が同じものを測定している場合のみ，そのテストは“等質的”であるという。

Green et al.（1977）は，合成得点の α 係数はテスト（尺度）項目の等質性（homogeneity）の十分な証明を提供しているとみなすべきでないことを指摘した。また，McDnald（1981）は，もし尺度項目群がただ一つの共通因子を有する一因子モデルに適している場合，その場合にのみ尺度が一次元であるとした。また，α 係数は信頼性の下限を示すものであり，尺度の等質性あるいは一次元性の指標にはならないことを指摘した。

Miller（1995）は，古典的テスト理論と構造方程式モデルを用いて，α 係数を説明し，その利用の問題について議論した。

α 係数は，一般的に（2. 4）式より，$r_{jk}=\sigma_j\sigma_k\sigma_{jk}$ の関係を利用して，

$$\alpha = \frac{1}{n-1}\left\{1 - \frac{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2}{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}\sigma_j\sigma_k r_{jk}}\right\} \tag{3.1}$$

と書き直せる。いま，尺度が m 個の直交する下位項目群からなり，それぞれの下位項目群は n 個の本質的に τ 等価な項目からなり，真分散が等しく，誤差分散も等しいとき，テスト全体の α 係数は，

$$\alpha = \frac{m \times n}{m \times n - 1}\left\{\frac{(n-1) \times r}{1 + (n-1) \times r}\right\} \tag{3.2}$$

となる。Table 1は（3. 2）式に基づき，相関係数を一定にしたときの項目数，因子数による α 係数の変化を示したものである。

α 係数は，項目数，因子数に依存することが明らかである。このことから，“α 係数はテストの等質性あるいは一次元性の指標としては，ほとんど，あるいは，まったく価値をもたない。また，テストが一次元でないとき α 係数は過小に推定される可能性がある”（Miller，1995）と結論づけた。

Table 1 The number of factors, items, correlations among items and α.

	Number of factors	Number of items	correlation	α
(1)	4	10	0.2	0.66
	4	50	0.2	0.91
(2)	1	10	0.2	0.71
	5	10	0.2	0.66

Table 2は，二次元構造から成る尺度の項目間相関行列および因子パターンとを示したものである。本データは，生活意識に基づく実際の行動を表す215項目の項目間相関行列を因子分析して得られた生活特性6尺度のうち，2つの尺度の項目を用いて求められた16項目間相関行列と，平均，標準偏差およびその因子分析結果（Varimax解）である（藤村発表準備中）。

実際の2つの尺度得点間の相関は0.405である。それぞれの尺度8項目，計16項目の α 係数は0.86であった。各尺度の α 係数はそれぞれ0.826，0.820である。2つの尺度は，生

Table 2 Correlations, Means, Standard Deviations & Factor Loadings.

Var.	Correlation																Mean	S.D.	Fact1	Fact2
V1	1.0																3.76	1.02	.72	.16
V2	.64	1.0															3.18	1.02	.74	.00
V7	.51	.42	1.0														0.35	1.04	.58	.15
V31	.38	.38	.29	1.0													2.60	1.08	.54	.22
V35	.31	.35	.22	.41	1.0												2.30	0.90	.49	.10
V96	.32	.31	.35	.37	.29	1.0											3.18	1.09	.51	.15
V124	.55	.47	.47	.44	.34	.41	1.0										3.26	0.94	.70	.22
V183	.32	.33	.29	.27	.29	.38	.44	1.0									3.15	1.14	.48	.22
V40	.20	.04	.12	.14	.06	.13	.26	.20	1.0								3.84	0.85	.10	.59
V54	.26	.20	.30	.31	.30	.21	.26	.21	.28	1.0							3.24	0.96	.30	.51
V65	.21	.13	.15	.21	.13	.16	.21	.22	.44	.44	1.0						3.53	0.92	.15	.60
V99	.20	.06	.14	.28	.10	.18	.23	.23	.37	.31	.39	1.0					3.54	1.09	.11	.67
V100	.14	.02	.14	.15	.05	.07	.16	.12	.18	.26	.24	.44	1.0				3.05	0.97	.06	.49
V146	.38	.35	.23	.30	.22	.25	.44	.32	.37	.41	.35	.32	.27	1.0			3.36	0.93	.41	.49
V179	.25	.14	.25	.22	.14	.12	.25	.14	.42	.40	.40	.49	.27	.37	1.0		3.51	0.94	.17	.63
V188	.23	.15	.21	.22	.18	.26	.24	.30	.42	.37	.37	.42	.40	.40	.39	1.0	2.98	1.04	.20	.63

活意識領域における多数の項目間の相関行列から，因子分析によって操作的に定義された6つの下位概念を測定すべく構成された6尺度のうちの2つであり，心理学的には全く別の行動特性を表すものである。

また，それぞれの尺度内の項目はその特性を満たすものであることが因子分析的に確認されているものである。α 係数は高くても一次元ではないことを典型的に示すものである。Miller (1995) は下位次元が直交するという条件下で (3. 2) 式を導出したが，本事例では，下位次元は互いに相関を持ちながらも一次独立な関係にあるそれぞれの特性因子を満たす項目群のケースである。Varimax 解などの直交因子解に基づいて選択された項目により構成された尺度は，これらの項目群の共通因子空間における布置の重心を当該因子軸が通っていない場合，実際の尺度得点間には相関がある。因子の直交性は因子解を導き出す数学的条件であり，心理学的特性間の直交性を意味しない。心理学等の実質科学においては，直交因子は n 個の心理学的変数による n 次元空間における m 個の準拠枠 (frame of reference) とみなされるべきものと考える。この問題については討論でさらに論述する。

4. α 係数を最大化する重み付き合成得点

n 個の重み付き変数からなる合成得点，

$$g_i = w_1 x_{i1} + w_2 x_{i2} + \cdots + w_n x_{in} \tag{4. 1}$$

があるとき，合成得点の α 係数を最大化する重み $w_1, w_2, \cdots, w_n$ について，Lord (1958)，Mulaik (1972)，池田 (1973) にしたがって展開する。

N 人のサンプルに対して n 項目の測定が行われたとき，n 項目からなる尺度の α 係数は，

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j^2}{s_g^2}\right) \tag{4. 2}$$

で得られる。s_g^2 は n 項目の合計得点の分散であり，s_j^2 は項目 j の分散を表す。いま $\boldsymbol{w}$ を各項目に対する重みを要素とする n 次のベクトル，$\boldsymbol{X}$ を $(N \times n)$ 次の得点行列，$\bar{\boldsymbol{x}}$ を n 項目の平均値を要素とするベクトルとすると，(4. 2) 式で得られた合計得点の分散は，

$$s_g^2 = \frac{1}{N}\boldsymbol{g}'\boldsymbol{g} = \frac{1}{N}\left(\boldsymbol{Xw} - \boldsymbol{1}\bar{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{w}\right)'\left(\boldsymbol{Xw} - \boldsymbol{1}\bar{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{w}\right) = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{Cw} \tag{4. 3}$$

となる。ここで，$\boldsymbol{C}$ は項目間の分散共分散行列である。対角項は項目の分散 s_j^2 であり，これを要素とする対角行列を $\boldsymbol{D}^2$ とする。重み付けられた項目得点の分散は，$v_j^2 s_j^2 (j=1, 2, \cdots, n)$ であることから，重み付けられた項目得点からなる測定の α 係数は，

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{Cw}}\right) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{Cw} - \boldsymbol{w}'\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{Cw}}\right) \tag{4. 4}$$

となる。$\boldsymbol{w}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}$ が一定という条件のもとで，（4. 4）式を最大にするには，

$$f(\boldsymbol{w})=\left(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}'\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{w}\right)-\lambda\left(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}-s_g^2\right) \tag{4. 5}$$

なる $f(\boldsymbol{w})$ を最大化すればよい。ここで，λ はラグランジュの乗数，s_g^2 は合成得点の分散で定数である。そこで，$\boldsymbol{w}$ の各要素で $f(\boldsymbol{w})$ を偏微分し，結果をゼロと置くと，

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f(\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{w}-\lambda\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0} \tag{4. 6}$$

となり，さらに，

$$\left(\boldsymbol{C}-\frac{1}{1-\lambda}\boldsymbol{D}^2\right)\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0} \tag{4. 7}$$

が導かれる。いま，（4. 7）式の左から $\boldsymbol{D}^{-1}$ を乗じると，

$$\left(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}-\frac{1}{1-\lambda}\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0} \tag{4. 8}$$

となり，さらに，

$$\left(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-1}-\frac{1}{1-\lambda}\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0} \tag{4. 9}$$

が導かれる。

$$\mu=\frac{1}{1-\lambda},\quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{w} \tag{4. 10}$$

とおくと，（4. 9）式は，

$$(R-\mu\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \tag{4. 11}$$

となり，結局，α を最大にする重みベクトル $\boldsymbol{w}$ は項目間相関行列 $\boldsymbol{R}$ の最大固有値とその固有ベクトルの問題に帰結し，

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{v} \tag{4. 12}$$

として求められる。さらに，固有値 μ と α の関係については，（4. 10），（4. 11）式より，

$$\boldsymbol{w}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}=\mu\boldsymbol{w}'\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{w} \tag{4. 13}$$

したがって，

$$\mu=\frac{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{w}} \tag{4. 14}$$

となり，（4. 4）式より，

$$\alpha=\frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{\mu}\right) \tag{4. 15}$$

となることがわかる。

μ が1.0以上の範囲で固有値を求めるならば，項目間相関行列 $\boldsymbol{R}$ から互いに直交な複数の α 係数を最大とする主成分が得られる。各主成分と項目間の相関係数すなわち負荷量を求め，Varimax 法などで単純構造化を図り，寄与の小さい項目を除いたり，必要なら

ば項目を追加して新たに項目間相関行列 $\boldsymbol{R}$ を求めて先の手続きを繰返しながら項目選択を行うならば，測定せんとする人格領域の α 係数を最大とする下位概念を測定する尺度を構成することが可能である。

5. 主成分の直交回転における α 係数の不変性

Kaiser (1992)，Ten Berge & Hofstee (1999) は複数の合成得点（次元）からなる測定尺度あるいはテストにおいて，それぞれの合成得点の α 係数の合計は，合成得点軸を直交変換しても不変であることを明らかにした。このことは，複数の人格次元からなる測定（尺度テスト）全体の信頼性を損うことなく，下位次元の単純構造化を図り，概念化できることを意味するものである。

5.1 Kaiser の証明

Kaiser (1992) は，n 項目の相関行列を因子分析して得られた r 個の直交因子の因子得点の α 係数の和は，因子を直交回転しても不変であることを証明した。いま，第 j 因子の α 係数を α_j とすると，因子得点の平均 0，分散が 1 であることから，

$$\alpha_j=\frac{n}{n-1}\left(1-\sum_{k=1}^{n}w_{jk}^2\right) \tag{5.1}$$

となり，r 個の α 係数の和は，

$$\sum_{j=1}^{r}\alpha_j=\frac{n}{n-1}\left\{r-tr\left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)\right\} \tag{5.2}$$

ここで，

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} \tag{5.3}$$

である。$\boldsymbol{W}$ は r 個の重みベクトルからなる行列（$n\times r$ 次）であり，$\boldsymbol{A}$ は因子パターン行列（$n\times r$ 次）である。

$$tr\left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\right)=tr\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} \tag{5.4}$$

いま，$\boldsymbol{T}$ を（$r\times r$）次の直交変換行列とするとき，

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} \tag{5.5}$$

なる $\boldsymbol{B}$ は，因子パターン行列が直交変換されたものである。$\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{U}$ がともに正方行列であるとき，

$$tr\left(\boldsymbol{V}\boldsymbol{U}\right)=tr\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}\right) \tag{5.6}$$

が成り立つことから，

$$tr\boldsymbol{T}'\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{T}=tr\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}'\right)\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1}=tr\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)^{-1} \tag{5.7}$$

がなりたつ。$\boldsymbol{T}$ は正規直交行列であるから，$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}'=\boldsymbol{I}$（芝，1979，p.242）。

したがって，

$$tr(\boldsymbol{A'A})^{-1} = tr(\boldsymbol{B'B})^{-1} \tag{5.8}$$

となり，主成分を直交変換しても α 係数の合計は変わらない。

5.2 α 係数不変の同時解

Ten Berge & Hofstee（1999）は，主成分を求める際の重み，$\boldsymbol{W}$ の解のとり方にかかわらず，$tr(\boldsymbol{W'W})$ は不変であることを導いた。n 個の変数の標準化された得点からなる（$N \times n$）次の行列を $\boldsymbol{Z}$ とすると，第 j 番目の主成分の α 係数は，

$$\alpha_j = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{tr(\boldsymbol{w}'_j \boldsymbol{R} \boldsymbol{w}_j)}{\boldsymbol{w}'_j \boldsymbol{R} \boldsymbol{w}_j}\right) = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\boldsymbol{w}'_j \boldsymbol{w}_j}{\boldsymbol{w}'_j \boldsymbol{R} \boldsymbol{w}_j}\right) \tag{5.9}$$

となる。したがって，r 個の主成分の α 係数の合計は，

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j = \sum_{j=1}^{r} \left\{ \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\boldsymbol{w}'_j \boldsymbol{w}_j}{\boldsymbol{w}'_j \boldsymbol{R} \boldsymbol{w}_j}\right) \right\} = \frac{n}{n-1}\left(r - \frac{tr(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W})}{\boldsymbol{W}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{W}}\right) \tag{5.10}$$

となる。$\boldsymbol{W}$ は（$n \times r$）次の行列である。(5. 10) 式が最大になるためには，

$$f(\boldsymbol{W}) = tr(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}) \tag{5.11}$$

が，$\boldsymbol{W}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{I}_r$ という条件のもとで最小になる $\boldsymbol{W}$ を求めることになる。いま，$\boldsymbol{X}$ を，

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R}^{1/2}\boldsymbol{W} \tag{5.12}$$

とすると，$f(\boldsymbol{W})$ は，

$$f(\boldsymbol{W}) = tr(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X}) \tag{5.13}$$

となり，$\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{R}$ の最初の固有ベクトルを含む（$n \times r$）次の正規直交行列である（Ten Berge & Hofstee，1999）。

相関行列 $\boldsymbol{R}$ は，

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}' \tag{5.14}$$

のように固有分解することができる。$\boldsymbol{\Lambda}$ は大きいほうから n 個の固有値を対角要素にもつ対角行列であり，$\boldsymbol{Q}$ は固有値に対応する（$n \times n$）次の正規直交行列である。$\boldsymbol{\Lambda}_r$ を大きい方から r 個の固有値を要素とする対角行列，$\boldsymbol{Q}_r$ をそれに対応する固有ベクトルからなる，（$n \times r$）次の行列とする。そして，$\boldsymbol{N}$ を任意の直行変換行列とすると，$\boldsymbol{X}$ は，

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{K}_r\boldsymbol{N} \tag{5.15}$$

となり，

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{R}^{-1/2}\boldsymbol{K}_r\boldsymbol{N} = \boldsymbol{K}_r\boldsymbol{\Lambda}_r^{-1/2}\boldsymbol{N} \tag{5.16}$$

なる $\boldsymbol{W}$ は α 係数の合計を最大にする重みである。α 係数の合計を最大にする r 個の合成得点は，任意の直交変換行列によって回転された主成分である。

$\boldsymbol{T}$ を正規直交行列とし，$\boldsymbol{W}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{I}$ が成り立つとき，関数 $f(\boldsymbol{W})$ は，

$$tr(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}) = tr(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}) = tr(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W}) \tag{5.17}$$

そして，

$$\boldsymbol{T'W'RWT}=\boldsymbol{I} \tag{5.18}$$

であるから，直交変換後も不変である。

6. 合成得点の信頼性の最大化

Cliff（1988）は，変数群1とそれに平行な変数群2から，それぞれ合成得点，$c_{i1}=\sum_{j=1}^{n} w_j z_{ij1}$，$c_{i2}=\sum_{j=1}^{n} w_j z_{ij2}$ を求め，その相関 $r_{c_1c_2}$，すなわち合成得点の信頼性係数が最大になる $w_j(j=1,2,\cdots,n)$ を求める方法を考案した。また，Cliff & Cruso（1998）は，Cliff（1988）の方法を一般化し，RCA（Reliable Component Analysis）と称して，主成分分析（PCA）モデル，因子分析（PFA）モデルとの関係について比較検討を行った。

合成得点の信頼性係数を ρ，項目間の相関係数を $r_{jk}(j,k=1,2,\cdots,n)$，項目の信頼性係数を r_{jj} とすると，

$$\rho=\frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n} w_j w_k r_{jk}+\sum_{j=1}^{n} w_j^2 r_{jj}}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n} w_j w_k r_{jk}+\sum_{j=1}^{n} w_j^2} \tag{6.1}$$

なる合成得点の信頼性係数の算出式を導出した。いま，$\boldsymbol{w}$ を n 次の重みベクトル，$\boldsymbol{R}$ を（$n\times n$）次の相関行列，$\boldsymbol{R}^*$ を $\boldsymbol{R}$ の対角要素に各項目の信頼性係数をもつ相関行列とすると，（6.1）式は，

$$\rho=\frac{\boldsymbol{w'R^*w}}{\boldsymbol{w'Rw}} \tag{6.2}$$

となり，ρ は，

$$\left(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}^*-\rho\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0} \tag{6.3}$$

から（Green, 1950），$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}^*$ の最大固有値であり，$\boldsymbol{w}$ はそれに対応する固有ベクトルとなる。

Ten Berge（2000）は，RCAによって得られた，信頼性を最大にする複数の固有ベクトルから得られる因子負荷量を直交変換しても，Ten Berge & Caruso（1998)より，信頼性の合計は不変であると論評した。

7. イメージ得点の信頼性

Guttman（1953）は，n 個の変数によってある人格領域の測定を行うとき，変数 j の標準化得点 z_{ij} は，$z_{ij}=p_{ij}+e_{ij}$ と分割される。p_{ij} をイメージ，e_{ij} を反イメージと呼んだ。イメージ p_{ij} は変数 j を除く $(n-1)$ 個の変数からなる $(n-1)$ 次元空間との共

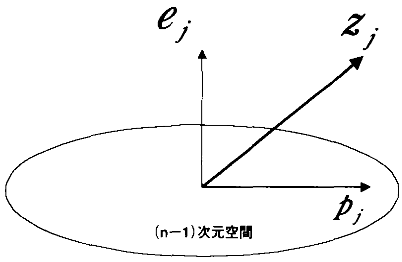

Fig.1 Image of measurement.

通部分であり，反イメージ $(n-1)$ 次元空間の超平面に独立な成分をいう。したがって，変数 j の反イメージは他の $(n-1)$ 個の変数とは相関を持たない。変数 j のイメージ p_{ij} は，

$$p_{ij}=v_{1j}z_{i1}+\cdots+v_{j-1,j}z_{i,j-1}+v_{j+1,j}z_{i,j+1}+\cdots+v_{nj}z_{ij} \tag{7.1}$$

のように，$(n-1)$ 個の変数から推定される。ここで，v_{1j}、$\cdots$、v_{nj} は $(n-1)$ 個の変数から z_{ij} を推定するときの偏回帰係数であり，z_{ij} と p_{ij} の重相関係数を最大にする基準で求められる。

ところで，z_{ij} と p_{ij} の差の平方和を最小とすることが，両者の重相関係数を最大化する十分条件となっているので（芝，1974），ここでは最小 2 乗法的に解を求めると，n 個のすべての変数についての重み行列 $\boldsymbol{V}$（$n\times n$ 次）は，

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{S}^2 \tag{7.2}$$

となる（Harris, 1962；Kaiser, 1963；芝，1974）。ここで，$\boldsymbol{I}$ は対角要素がすべて 1，非対角要素がすべて 0 の $(n\times n)$ 次の単位行列である。また，$\boldsymbol{S}^2$ は，

$$\boldsymbol{S}^2=\left(diag\boldsymbol{R}^{-1}\right)^{-1} \tag{7.3}$$

すなわち，$\boldsymbol{R}$ の逆行列の対角要素の逆数を要素とする対角行列である。結局，イメージを求めるための重みは n 個の変数間の相関行列 $\boldsymbol{R}$ とその逆行列 $\boldsymbol{R}^{-1}$ の対角要素の逆数を求めることに帰結することが解る。(7. 2) 式による重み行列を用いて，n 個の変数にそれぞれ対応するイメージは，N 人のイメージ得点を要素とする n 個の列ベクトルからなるイメージ行列を $\boldsymbol{P}$（$N\times n$ 次）は，

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{S}^2\right) \tag{7.4}$$

によって求められる。イメージ理論では，変数 z_{ij} の分散は，イメージ，反イメージの性質から，

$$\sigma_{z_j}^2=\sigma_{p_j}^2+\sigma_{e_j}^2=1 \tag{7.5}$$

となる。また，因子分析モデルでは，直交因子モデルで表現すると，

$$\sigma_{z_j}^2=a_{j1}^2+a_{j2}^2+\cdots+a_{jm}^2+d_j^2=h_j^2+d_j^2=1 \tag{7.6}$$

となる。h_j^2 は共通性（communality），d_j^2 は独自性（uniqueness）と呼ばれる。

Guttman（1953）は，n 個の変数は，測定しようとする内容を表す変数母集団からのサンプルと考え，当該変数を除く $(n-1)$ 個の変数によって互いに定義するイメージを部分イメージ（partial image），変数母集団によって定義されるイメージを全体イメージ（total image）と呼んだ。同様に，サンプル変数による反イメージを部分反イメージ（partial anti-image），変数母集団による反イメージを全体反イメージ（total anti-image）と呼んだ。そして，$n\to\infty$ のとき，$\sigma_{p_j}^2\to h_j^2$，$\sigma_{e_j}^2\to d_j^2$ となる（Kaiser，1963）。n が充分に大きく，内容的に変数母集団を代表している場合，変数 j のイメージは因子分析モデルでいう共通因子空間に該当する。このことは，因子分析法の適用に際して，最も

基本的な関心事であるところの，変数母集団の構造に関する「因子分析的推論の妥当性」の問題である。いずれにしても，ここでは，理念型としてのモデルを展開していきたい。

そこで，n 変数のイメージ間の共分散 $\boldsymbol{G}$ を求めると，

$$\boldsymbol{G}=\frac{1}{N}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{S}^2-2\boldsymbol{S}^2 \tag{7.7}$$

となる。一方，反イメージの共分散 $\boldsymbol{B}$ は，

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{N}\boldsymbol{E}'\boldsymbol{E}=\frac{1}{N}(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{P})'(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{P})=\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{S}^2 \tag{7.8}$$

となる。

Harris（1962）はRao（1955）の正準因子分析（canonical factor analysis）とGuttman（1953）のイメージ分析の関係について明らかにした。Raoの共通性の推定値として重相関係数の平方を用いた時の正の正準相関係数の数とGuttmanの共通因子数の下限値が対応していることを示した。Raoの手続きは次のような解が求められる。

$$\left(\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}-\lambda\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0} \tag{7.9}$$

ここで，$\boldsymbol{U}^{-1}$ は独自性の平方根の逆数を対角要素とする対角行列である。$\boldsymbol{R}$ は n 変数間の相関行列である。(7. 9) 式の $\boldsymbol{q}$ の要素が，$q_1=q_2=,\cdots,=q_n=0$ でない解をもつには，

$$\left|\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}-\lambda\boldsymbol{I}\right|=\boldsymbol{0} \tag{7.10}$$

でなければならない。$\boldsymbol{R}$ が正則行列（nonsingular matrix），すなわち $|\boldsymbol{R}|\neq 0$ のとき，λ は n 個の正の根を持つ。λ は $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}$ の固有値であり，この大きい方から n 個の固有値を対角要素とする対角行列を $\boldsymbol{\Lambda}$ とすると，$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}$ は，

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}' \tag{7.11}$$

のように固有分解される。$\boldsymbol{Q}$ は n 個の固有値に対応する固有ベクトルを各列の要素とする $(n\times n)$ 次の行列である。(7. 11) 式の両辺の左右から $\boldsymbol{U}$ を乗じて，

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{U} \tag{7.12}$$

を得る。

また，イメージの共分散行列 $\boldsymbol{G}$ についても，$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{U}^{-1}$ が，

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{Q}\left[(\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right]\boldsymbol{Q}' \tag{7.13}$$

のように固有分解される。このとき，$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{U}^{-1}$ の固有ベクトルは $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}$ の固有ベクトルと同じであるが，$\boldsymbol{M}=\left[(\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right]$ とおき，(7.13) 式の両辺の左右から $\boldsymbol{U}$ を乗じて，

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{U} \tag{7.14}$$

を得る。$\boldsymbol{S}^2$ を独自性の対角行列 $\boldsymbol{U}^2$ の近似値とするとき，(7. 14) 式は，

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{S} \tag{7.15}$$

となる。したがって，イメージの因子負荷行列 $\boldsymbol{A}_g$ は，

$$\boldsymbol{A}_g=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{M}^{1/2} \tag{7.16}$$

となる。最初の因子負荷量をコーティマックス法やバリマックス法などで単純構造化したときの変換行列を $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{T'T}=\boldsymbol{I})$ とすると，

回転後の因子負荷量行列は，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_g\boldsymbol{T}=\boldsymbol{SQM}^{1/2}\boldsymbol{T} \tag{7. 17}$$

となる。イメージ因子得点行列を $\boldsymbol{F}$（$N\times m$ 次）とすると，イメージ得点は，

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{FA'}=\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}_g\boldsymbol{T}\right)' \tag{7. 18}$$

となり，両辺の右から $\boldsymbol{S}^{-1}$ を乗じると，(7. 17) 式の関係から，

$$\boldsymbol{PS}^{-1}=\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{A}_g\boldsymbol{T}\right)'\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{FT'M}^{1/2}\boldsymbol{Q'} \tag{7. 19}$$

となる。さらに，両辺の右から $\boldsymbol{QM}^{-1/2}\boldsymbol{T}$ を乗じて両辺を入れ替えると，

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{PS}^{-1}\boldsymbol{QM}^{-1/2}\boldsymbol{T} \tag{7. 20}$$

となり，これに (7. 4) 式を代入して整理すると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=\boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{S}^2\right)\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{QM}^{-1/2}\boldsymbol{T}\\&=\boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{S}^{-2}-\boldsymbol{R}^{-1}\right)\boldsymbol{A}_g\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{T}\end{aligned} \tag{7. 21}$$

となる。$\boldsymbol{W}=\left(\boldsymbol{S}^{-2}-\boldsymbol{R}^{-1}\right)\boldsymbol{A}_g\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{T}$ とおくと，因子得点 $\boldsymbol{F}$ は，

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{ZW} \tag{7. 22}$$

によって得られる。

Kaiser & Rice (1974)，Kaiser & Michael (1977) はこの因子得点の信頼性係数として，一般化されたKuder-Richardsonの信頼性係数の公式 20—$KR(20)$—（α 係数）を適用して，

$$KR20(f_k)=\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{n}w_{jk}^2\sigma_{z_j}^2}{\sigma_{f_k}^2}\right) \tag{7. 23}$$

を提案した。ここで，n は変数の数，w_{jk} は因子 k の因子得点を求めるための変数 j の重み，$\sigma_{z_j}^2$ は変数 j の分散，$\sigma_{f_k}^2$ は因子 k の因子得点の分散を表す。ところで，変数 $j(=1,2,\cdots,n)$，因子得点 $f_k(k=1,2,\cdots,m)$（m は因子数）はそれぞれ標準化されているから，分散はそれぞれ 1 であるから，(7. 22) 式は，

$$KR20(f_k)=\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(1-\sum_{j=1}^{n}w_{jk}^2\right) \tag{7. 24}$$

となる。

Kaiser & Michael (1977) の公式に対して，Gorsuch (1980) は次のような問題点を指摘した。すなわち，「当該因子とごく微小な相関しか持たない変数が含まれているとき，Kaiser & Michaelの公式は不適当である」。仮に，当該因子に対する因子負荷量がゼロ

の変数が含まれている場合を想定すると問題の所在がより明確になる。つまり，当該因子に対する因子負荷量がゼロの変数は，その因子の因子得点を求める重みもゼロであることが明らかである。(7. 23) 式右辺の $\sum_{j=1}^{n} w_{jk}^2$ は全ての変数の重みについての2乗和であり，このような変数は当該因子得点の算出において何ら寄与しないにもかかわらず，乗数 $\left(\frac{n}{n-1}\right)$ を用いるため実際の信頼性係数より小さくなる。実際に因子分析法を適用するに際しては，因子軸を回転して因子構造の単純化を行い，当該因子に寄与する変数の性質から因子を概念化するという手続きが不可欠である。したがって，n 個の変数間の相関関係から2個以上の因子が抽出されるとき，当該因子に大きく寄与する変数の数は当然 n より少なくなる。(7. 23) 式右辺の定数と $w_k=\left(1-\sum_{j=1}^{n} w_{jk}^2\right)$ の値と信頼性係数の関係をTable 4に示した。当該因子に顕著に寄与する変数の数と n との差が大きければ因子得点の信頼性係数がより過小評価される事が解る。そこで，Gorsuch (1980) は，(7. 23) 式に用いられる「特定の因子に適切な n の数は，その因子に顕著な重みを持つ変数の数にすべき」ことを提案した。そのために顕著でない重みを持つ変数はそれらの重みを全て0に置き換えて，それらの変数が因子得点の信頼性評価に用いられないようにするという。

Table 4　Relation between constant and reliability coefficient (changed Gorsuch, 1980).

n	$n/(n-1)$	Coefficient when $w_k=0.7$	Coefficient when $w_k=0.6$
5	1.25	0.875	0.750
10	1.11	0.777	0.666
15	1.07	0.749	0.642
20	1.05	0.735	0.630
25	1.04	0.728	0.624
30	1.03	0.721	0.618

しかし，実際の因子分析においては，当該因子を構成する変数の負荷量の値をどの程度にするかによっては，求められた因子得点の信頼性係数が実際の因子の内容と異なってしまう可能性も否定できない。このことは，因子の妥当性にかかわる問題と言えよう。

8. 同族 (congeneric) 変数の信頼性

8.1　1つの同族変数群の合成変数の信頼性

同族 (congeneric) とは同一の特性を測定している項目群のことをいう (Jöreskog, 1970)。Jöreskog (1970) は，共分散構造分析の一般モデルを提案し，同族変数への適用についても考察した。一般モデルでは，変数間の分散共分散 (以後共分散という) は，

$$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{\Lambda\Phi\Lambda}'+\boldsymbol{\Psi}^2\right)\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{\Theta}^2 \tag{8.1}$$

$$E(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A\Xi P} \tag{8. 2}$$

の形をとる。ここで，$\boldsymbol{B}$ は $p\times q$ 次の行列，$\boldsymbol{\Lambda}$ は $q\times r$ 次の行列，$\boldsymbol{\Phi}$ は $r\times r$ 次の対称行列，$\boldsymbol{\Psi}$ および $\boldsymbol{\Theta}$ はそれぞれ $q\times q$ 次， $p\times p$ 次の対角行列である。p は変数の数，q および r はモデルを適用するテーマにおける研究者の仮説によって決められる。$\boldsymbol{\Xi}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{\Phi}$，$\boldsymbol{\Psi}$ および $\boldsymbol{\Theta}$ におけるパラメータは仮説的に既知であり得るし，残りの１つあるいはそれ以上のパラメータは未知であるけれども同じ値を持ち得る。$\boldsymbol{A}$ は $N\times g$ 次の階数が g の行列，$\boldsymbol{P}$ は $h\times p$ 次の階数が h の行列で，それぞれ $g\leq N$，$h\leq p$ である。パラメータは次の３種がある。

（１）固定パラメータ：あらかじめ数値が割り当てられる。

（２）制約パラメータ：未知であるが，他の１つあるいはそれ以上のパラメータと同値である。

（３）自由パラメータ：未知で制約もないパラメータである。

いま，標本の共分散を，

$$\boldsymbol{T}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A\Xi P})'(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A\Xi P}) \tag{8. 3}$$

とすると，対数尤度関数

$$F=\log|\boldsymbol{\Sigma}|+tr\left(\boldsymbol{T\Sigma}^{-1}\right) \tag{8. 4}$$

を最小にする未知のパラメータの解を推定する。

古典的テスト理論では，個人 i の変数 j における測定値 x は，真値 τ と誤差 e の和と仮定される。この真値と誤差は相関しない。p 個の変数の測定値 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ は真値 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_p$ を持ち，p 個の真値いかなる組み合わせにおいても相関が１であるとき，これらの変数群は同族（congeneric）であるという。この変数群の測定値は，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\beta\tau}+\boldsymbol{e} \tag{8. 5}$$

と表わされる。ここで，$\boldsymbol{x}'=(x_1,\cdots,x_p)$，$\boldsymbol{\beta}'=(\beta_1,\cdots,\beta_p)$ は回帰係数ベクトル，$\boldsymbol{e}'=(e_1,\cdots,e_p)$ は誤差得点のベクトル，$\boldsymbol{\mu}$ は平均値を要素とするベクトルである。そして，$\boldsymbol{\tau}$ は真値で，$E(\tau)=0$，$Var(\tau)=1$ と仮定する。$\boldsymbol{x},\boldsymbol{e},\boldsymbol{\tau}$ の要素は母集団からのランダム変数である。$\theta_1^2,\cdots,\theta_p^2$ をそれぞれ $e_1,\cdots,e_p$ の分散とする。また，真分散をそれぞれ $\beta_1^2,\cdots,\beta_p^2$ とすると，変数間の共分散 $\boldsymbol{\Sigma}$ は，

$$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\beta\beta}'+\boldsymbol{\Theta}^2 \tag{8. 6}$$

となり，$\boldsymbol{\Theta}$ は誤差分散を要素とする対角行列である。これは（8. 1）式の一般モデルの $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Phi}=1$，$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{0}$ としたとした特殊なケースである。共通因子が１つの場合の因子分析の基本方程式である。$\boldsymbol{\beta}$ および $\boldsymbol{\Theta}$ の推定は通常の因子分析の手法を適用して行うことができる。もし，$\boldsymbol{x}$ が多変量正規分布に従い，標本数が十分に大きいとき，最尤法によって推定を行い，検定することができる（Jöreskog，1967）。

Jöreskog, K.G.（1971）は同族変数 j の信頼性を，

$$\rho_j=\frac{\beta_j^2}{\beta_j^2+\theta_j^2} \tag{8.7}$$

で求まることを提案した。$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ および $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ をそれぞれ最尤推定値とすると推定値による変数 j の信頼性は，

$$\hat{\rho}_j=\frac{\hat{\beta}_j^2}{\hat{\beta}_j^2+\hat{\theta}_j^2} \tag{8.8}$$

と書き換えられる。もし，変数群が完全に同族であるとき，平行性（parallelity）を仮定しなくても変数間の相関係数から直接信頼性を推定することができる（Jöreskog, 1971）。

信頼性を高めるために，同族変数の合成得点を求めるとき，合成得点のための重みベクトルを $\boldsymbol{\alpha}'=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p)$ とすると，合成得点 y は，

$$y=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\mu}+(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{e} \tag{8.9}$$

となる。合成得点 y の信頼性は，

$$\rho=\frac{(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})^2}{(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})^2+\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Theta}^2\boldsymbol{\alpha}} \tag{8.10}$$

となる。$\boldsymbol{\alpha}$ が $\boldsymbol{\Theta}^{-2}\boldsymbol{\beta}$ に比例するとき信頼性が最大となることが証明されている（Jöreskog, 1971）。したがって，合成得点の信頼性は，

$$\rho_{\max}=\frac{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Theta}^2\boldsymbol{\alpha}} \tag{8.11}$$

となる。

Lord & Novick（1968）における平行（parallel）な変数，タウ等価（τ-equivalent）な変数は同族変数の特殊なケースである。つまり，平行とは，真分散が互いに等しく，誤差分散も互いに等しい場合をいい，タウ等価とは真分散が互いに等しいが誤差分散が異なる場合をいう。

平　行　：$\beta_1^2=\cdots=\beta_p^2$ かつ $\theta_1^2=\cdots=\theta_p^2$

タウ等価　：$\beta_1^2=\cdots=\beta_p^2$

互いに平行な変数はまたその平均値の間にも，

$$\mu_1=\mu_2=,\cdots,=\mu_p$$

が仮定される。

8.2 複数の同族変数群の合成得点の信頼性

（8. 1）式に示された一般モデルは同族変数群が複数の場合にも適用できる

(Jöreskog, 1970；Jöreskog, 1971)。いま，q 個の同族変数群があり，同族変数群は，それぞれ $p_1, p_2, \cdots, p_q$ 個の変数からなるとする。すなわち，

$$\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \cdots, \boldsymbol{x}'_q) \tag{8. 12}$$

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_q \tag{8. 13}$$

である。$\boldsymbol{x}_g$ は g 番目 $(g \leq q)$ の同族変数群である。真値 $\boldsymbol{\tau}_g$，平均値ベクトル $\boldsymbol{\mu}_g$，回帰係数ベクトル $\boldsymbol{\beta}_g$ から $\boldsymbol{x}_g$ は，

$$\boldsymbol{x}_g = \boldsymbol{\mu}_g + \boldsymbol{\beta}_g \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{e}_g \tag{8. 14}$$

となる。一般性を損なうことなく，$E(\boldsymbol{\tau}_g)=0$，$Var(\boldsymbol{\tau}_g)=1$ と仮定することができる。

$$\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{\tau}' = (\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \cdots, \boldsymbol{\tau}_q), \quad \boldsymbol{e}' = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_q)$$

Werts, Rock, Linn & Jöreskog (1978) は因子的に複雑な合成変数，すなわち異なる特性の測定値からなる合成得点の信頼性を推定する一般的方法を提案した。$\boldsymbol{x}$ は p 個の変数による測定値からなる $p \times 1$ 次のベクトルである。古典的テスト理論では変数 j の測定値は，

$$x_{ij} = t_{ij} + e_{ij} \tag{8. 15}$$

と仮定され，t_{ij} は真値，e_{ij} は誤差得点である。p 個の測定値を同時に表すように行列表記すると，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{e} \tag{8. 16}$$

となる。$\boldsymbol{B}$ は $p \times p$ 次の単位行列，$\boldsymbol{t}$ は p 次の真値ベクトル，$\boldsymbol{e}$ は p 個の変数の測定値における誤差を成分とするベクトルである。古典的テスト理論では，$E(\boldsymbol{x})=E(\boldsymbol{t})$，$E(\boldsymbol{e})=0$，$E(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{e})=0$，$E(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e})=\boldsymbol{\Theta}^2$ が仮定される。$\boldsymbol{\Theta}^2$ は p 個の変数の誤差分散を要素とする対角行列である。$\boldsymbol{\Gamma}$ を真値間の共分散行列とする。さらに，真値が複数の共通因子と独自因子からなるモデルを考えると，真値は，

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{u} \tag{8. 17}$$

となる。ここで，$\boldsymbol{f}$ は k 個の共通因子得点ベクトル，$\boldsymbol{\Lambda}$ は $p \times k$ 次の因子負荷行列，$\boldsymbol{u}$ は p 次の独自因子得点ベクトルである。因子分析の性質から，$E(\boldsymbol{u})=0$，$E(\boldsymbol{f}'\boldsymbol{u})=0$，$E(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\Psi}^2$（$\boldsymbol{\Psi}^2$ は独自因子分散 $\boldsymbol{\Psi}_j^2$，$j=1, \cdots, p$ を対角要素にもつ対角行列）である。そして，$\boldsymbol{\Phi}$ を $k \times k$ 次の因子間共分散行列とすると，測定値間の共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ は，

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{\Theta}^2 = \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}' + \boldsymbol{\Psi}^2\right)\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{\Theta}^2 \tag{8. 18}$$

となる。

いま，p 個の測定値からなる合成得点は，$\boldsymbol{\omega}$ を p 変数に対する重み $(\boldsymbol{\omega}_1, \cdots, \boldsymbol{\omega}_p)$ を要素とするベクトルとすると，

$$\boldsymbol{x}_c = \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{x} \tag{8. 19}$$

として求められる。合成得点の分散を $\boldsymbol{\sigma}_{x_c}^2$ とすると，$\boldsymbol{\sigma}_{x_c}^2$ は，

$$\boldsymbol{\sigma}_{x_c}^2 = \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega} \tag{8. 20}$$

となる。また，真値の合成得点は，

$$T_c=\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{t} \tag{8.21}$$

となり，その分散 $\sigma^2_{T_c}$ は，

$$\sigma^2_{T_c}=\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\omega} \tag{8.22}$$

となる。合成得点の信頼性係数を r_{cc} とすると，

$$r_{cc}=\frac{\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}}=\frac{\boldsymbol{\omega}'\left(\boldsymbol{\Sigma}-\boldsymbol{\Theta}^2\right)\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}} \tag{8.23}$$

である。

9. 構成尺度の因子的真実性および因子的妥当性

Cattell & Tsujioka (1964)，辻岡 (1964) は，測定対象となる人格領域における人格因子を確立して，その人格因子を測定すべく尺度の構成法を提案した。その構成原理を「因子的真実性の原理」と呼び，辻岡他 (1975a，1975b，1977)，辻岡・清水・柴田 (1979)，辻岡・柴田 (1983)，柴田・辻岡 (1983) などの一連の研究において，実際に様々な人格領域における心理尺度を構成し，確認的因子分析的な測定理論を展開した。実際の尺度構成において，Varimax 解を用いて項目選択する研究が多い（堀・山本，2001；堀・吉田，2001；堀・松井，2001)。しかし，人格次元が互いに直交であるという制約を課すには無理がある。実際，直交解を元に構成された尺度で得られた尺度得点は互いに相関を持つことが一般的である。直交因子解は，因子間相関がゼロであるという条件下で得られる解であるため，直交因子軸とこれに高い因子負荷量をもつ項目群の重心とのズレ（他の因子に対する因子負荷量をもつ）が生じやすく，むしろ因子の直交条件をはずして項目群の重心を通る斜交因子の方がより単純構造になる。因子的真実性の原理もこのような理由から斜交因子解を前提とした尺度構成の原理である。ここでは，因子的真実性の原理の基本的な考え方について紹介する。Fig.2 は測定すべく人格因子と構成尺度との関係を図示したものである。F_w は測定すべく人格因子，F_u は当該人格領域における他の人格因子，OI は尺度ベクトル，OT は当該人格因子空間における尺度の共通性，TI は尺度の特殊性，OP は因子パターン，OS は尺度と測定すべき因子との相関すなわち因子構造である。これは，尺度の因子的妥当性と呼ばれる。また，α は尺度と因子との“ずれ”の角度である。項目の持つ特殊因子分散の累積により生ずると考えられる。尺度を構成する項目の F_u 因子パターンの合計がゼロのとき，

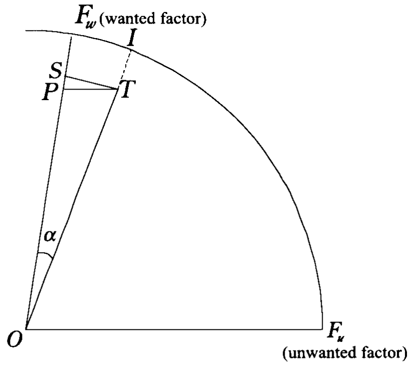

Fig.2 Factor-trueness & factorial validity of a scale in oblique factor space

α はゼロとなる。標準化された項目得点を z_{ij} とすると，因子分析モデルから，

$$z_{ij}=a_{jw}f_{iw}+a_{ju_1}f_{ju_1}+\cdots+a_{ju_l}f_{ju_l}+d_jU_{ij} \tag{9. 1}$$

と表記される。a_{jw} は，項目 j の測定すべく因子に対する因子パターン，$a_{ju_1}\sim a_{ju_l}$ はそれ以外の因子に対する因子パターンである。d_j は独自因子パターンである。f_{iw} は測定すべく因子に因子得点，$f_{iu_1}\sim f_{iu_l}$ はそれ以外の因子得点，U_{ij} は独自因子得点である。ところで，尺度得点すなわち合成得点は，

$$g_i=\sum_{j=1}^{n}b_{jw}z_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\left(b_{jw}a_{jw}f_{jw}+b_{jw}a_{ju_1}f_{ju_1}+\cdots+b_{jw}a_{ju_l}f_{ju_l}+b_{jw}d_jU_{ij}\right) \tag{9. 2}$$

と表記される。この合成得点の平均は標準得点の性質から 0 であり，標準偏差は，

$$\sigma_g=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}b_{jw}^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}b_{jw}b_{kw}r_{jk}} \tag{9. 3}$$

となる。したがって，合成得点の標準得点は $Z_{g_i}=g_i/\sigma_g$ となる。尺度の測定すべき人格因子に対する因子パターンは，

$$OP=\frac{\sum_{j=1}^{n}b_{jw}a_{jw}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}b_{jw}^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}b_{jw}b_{kw}r_{jk}}} \tag{9. 4}$$

となり，また因子構造は，

$$OS=\frac{\sum_{j=1}^{n}b_{jw}r_{jw}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}b_{jw}^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1\neq j}^{n}b_{jw}b_{kw}r_{jk}}} \tag{9. 5}$$

となる。因子的真実性係数（**coefficient of factor-trueness**）は，

$$r_{ft}=\frac{OS}{OT}=\frac{\sum_{j=1}^{n}b_{jw}r_{jw}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}b_{jw}a_{jw}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_{jw}r_{jw}\right)+\sum_{u=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{jw}a_{ju}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_{jw}r_{ju}\right)}} \tag{9. 6}$$

となる。これは，$(l+1)$ 個の人格因子空間における尺度の因子的妥当性である。**Fig.3** は，測定目的である F_w 因子とそうでない l 個の因子の 1 つ F_{u_1} の二次元空間における尺度項目の布置図である。これらの項目群は，F_w 因子の因子軸に対してほぼ線対称的に布置している。これらの項目の F_{u_1} 因子に対する因子パターンの合計はゼロに近い。実際の項目選択では丸で囲まれた項目を F_w 因子を測定する尺度項目とすることが望ましい。何故なら，それ以外の 2 項目は F_{u_1} 因子に対してパターン値が相対的に大きいためこれらを含めると測定尺度の等質性が低下するためである。

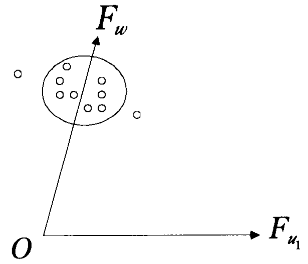

Fig.3 Item selection through the factor-trueness.

Fig.3 では F_{u_1} 因子は欲せざる因子とされているが，当該人格領域が m 次元であるとき，m 個の各因子に対してそれぞれ因子的真実性の原理により項目選択を行うことはいうまでもない。

討　論

先に述べた測定尺度の内的整合性と等質性あるいは一次元性の問題は，妥当性の問題と深く関連している。内的整合性の程度を表す α 係数は，測定尺度を構成する項目間の共分散が尺度の分散に占める比であり，極端な言い方をすれば，測定内容が何であれ相関を有する項目でありさえすれば，また項目数が多ければ，それなりの値を生じてしまうことは前述のとおりである。ところが，因子分析モデルでは相関係数は，

$$r_{jk}=a_{j1}a_{k1}+a_{j2}a_{k2}+,\cdots,+a_{jm}a_{km} \qquad (10.\ 1)$$

と表される。ここで，r_{jk} は項目 j と k の相関係数，$a_{j1},\cdots,a_{jm}$ は項目 j の，$a_{k1}\sim a_{km}$ は項目 k の m 個の因子に対する因子負荷量である。すなわち，相関係数は，当該項目が m 個の因子に対する因子負荷量の積和である。いま，２因子構造をもつ Table 5 の項目群について考えると，項目１と２，３と４の相関は，（10. 1）式よりともに 0.5 である。表面的には相関係数が同じであっても，それらの項目がもつ構造的な意味は異なることは明らかである。等質性あるいは一次元性は同一因子を構成する項目群に対して用いられるべき概念である（Green, et al., 1977; McDnald, 1981; Miller, 1995)。

Table 5　Matrix of Factor Loadings

	I	II
1	0.1	0.7
2	0.1	0.7
3	0.7	0.1
4	0.7	0.1
5	0.5	0.5

心理学研究においては，心理学的構成概念を表すと考えられる変数を用いて，他の基準によって分類された集団間の比較や，変数間の関係を分析することによって法則性を見出す方法をとる。すなわち，対象とする心理学的変数が担う意味は他の変数との相対的な関係の中で位置付けられるものである。このことは，Eysenck & Eysenck（1969）がいうところのどの行動水準が測定対象であっても同じである。通常，個々の項目得点の合計点として求められる尺度得点が如何なる心理学的意味あるいは心理機能を担っているかは，項目間の整合性の問題でなく，尺度を構成する項目が如何なる人格因子に満たされているかの問題なのである。さらに，これらの尺度が上位の因子に対して，それぞれどのような因子構造を有しているのか，すなわち，当該人格領域の構造的関係の中で測定尺度が意味づけらる。Fig.4 は，当該人格領域の構造的関係を図に表したものである。尺度間因子から測定尺度への矢印の太さは測定尺度の因子負荷量（因子パターン）の大きさをあらわす。項目間因子，尺度間因子は具体的な行動特徴間の相関関係から操作的に導出された心理学的構成概念であり，構成概念間の実態的な構造関係を表すものである。測定尺度の水準においては，互いに相関を持ちながら一次独立な関係にある構成概念どうしが，より上位の概念（尺度間因子水準）において統合される場合，これらの下位概念は広義には同質性といえよう。同質性を論ずる場合におい

ても，どの水準における同質性を求めるのかが前提になるべきである。しかしながら，少なくとも測定値として扱う部分については，その意味がより一義的であることが望ましいことは言を待たないであろう。そして，これらの測定値のプロフィールが如何なる因子構造

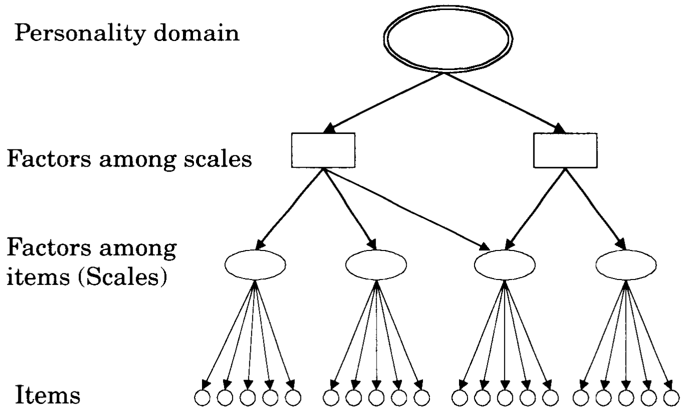

Fig.4 Personality structural relation of behavioral traits

を背景にして現出しているのかを明らかにすべきであると考える。たとえば，YG性格検査の攻撃性特性は，情緒不安定性因子に対しても，外向性因子に対しても正の中程度の負荷量を持つが（辻岡・藤村，1975），このような攻撃性特性の心的機能は，他の人格特性との相互関係の中で初めて明らかになる。このように考えると，測定尺度の内的整合性信頼性の問題は，最終的には構成概念妥当性へと収斂していくべきものと考える。

測定の妥当性の問題については，紙面の都合上次の機会に譲りたい。

引用文献

Allport, G. W. (1937). *Personality : A Psychological Interpretation.* Henry Holt and Company.（詫摩武俊・青木孝悦・近藤由紀子・堀　正共訳 (1982). パーソナリティ　―心理学的解釈―　新曜社）

Cattell, R. B. & Tsujioka, B. (1964). The importance of factor-trueness and validity, versus homojeneity and orthogonality, in test scales. *Educational and Psychological Measurement,* 24, 3-30.

Cliff, N. (1988). The eigenvalues-greater-than-one rule and the reliability of components. *Psychological Bulletin,* 103, 276-279.

Cliff, N. & Caruso, J. C. (1998). Reliable component analysis through maximizing composite reliability. *Psychological Methods*, 3, 291-308.

Cronback, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, 16, 297-334.

Eysenck, H. J. & Eysenck, S. B. G. (1969). *Personality Structure and Measurement.* Routlege & Kegan Paul.

Feldt, L. S. & Brennan, R. L. (1989). Reliablity. In Linn, R. L. (ed.) *Educational Measurement.* Third Edition. American Council on Education and Macmillan Publishing Company.（柳井春夫・小笠原晴彦訳　1992　信頼性。池田　央・藤田恵璽・柳井春夫・繁桝算男監訳　教育測定学p.147-210.　みくに出版）

Gorsuch, R. L. (1980). Factor score reliabilities and domain validities. *Educational and Psychological Measurement,* 40, 895-897.

Green, B. F. (1950). A note on the calculation of weights for maximum battery reliability.

Psychometrika, 15, 57-61.

Green, S. B., Lissitz, R. W., & Mulaik, S. A. (1977). Limitation of coefficient alpha as an index of test unidimensionality. *Educational and Psychological Measurement, 37,* 827-838.

Guilford, J. P. (1954). *Psychometric Methods.* McGraw-hills. (秋重義治監訳 (1959)。 精神検査法 倍風館)

Guttman, L. (1953). Image theory for the structure of quantitave variates. *Psychometrika, 18,* 277-296.

Harman, H. H. (1967). *Modern Factor Analysis(2nd ed.).* University of Chicago-Press.

Harris, C. W. (1962). Some Rao-Guttman relationships. *Psychometrika, 27,* 247-263.

堀 洋道・松井豊・山本眞理子編 (1994). 心理尺度ファイル —人間と社会を測る— 垣内出版。

堀 洋道監修・山本眞理子編著 (2001a). 心理測定尺度集Ⅰ 人間の内面を探る＜自己・個人内過程＞ サイエンス社

堀 洋道監修・吉田富二雄編著 (2001b). 心理測定尺度集Ⅱ 人間と社会のつながりをとらえる＜対人関係・価値観＞ サイエンス社

堀 洋道監修・松井 豊編著 (2001c). 心理測定尺度集Ⅲ 心の健康をはかる＜適応・臨床＞ サイエンス社

池田 央 (1973). テストⅡ 心理学研究法 8 東京大学出版会

池田 央 (1994). 現代テスト理論 朝倉書店

Jöreskog, K. G. (1967). Some contributions to maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika,* 32, 443-482.

Jöreskog, K. G. (1970). A general method for analysis of covariance structure. *Biometrika,* 57, 239-251.

Jöreskog, K. G. (1971). Statistical analysis of sets of congeneric test. *Psychometrika,* 36, 109-133.

Kaiser, H. F. (1963). Image analysis. *In C.W.Harris(ed.) Problems in measuring change.* University of Wisconsin Press.

Kaiser, H. F. (1992). On the invariance of the sum of coefficients alpha for factors under orthogonal rotation. *Psychological Reports, 70,* 545-546.

Kaiser, H. F., & Caffrey, J. (1965). Alpha factor analysis. *Psychometrika, 30,* 1-14.

Kaiser, H. F.,& Michael,W. B. (1977). Little Jiffy factor scores and domain validities. *Educational and Psychological Measurement,* 37, 363-366.

Kaiser, H. F., & Rice, J. (1974). Little jiffy, markⅣ. *Educational and Psychological Measurement, 34,* 111-117.

Krahé, B. (1992). *Personality and Social Psychology : Towards a synthesis.* Sage Publications Ltd. (堀下一也編訳 (1996). 社会的状況とパーソナリティ 北大路書房)

Lord, F. M. (1958). Some relations between Guttman's principal components of scale analysis and other psychometric theory. *Psychometrika, 23,* 291-296.

Lord, F. M. and Novick, P. M. (1968). *Statistical Theories of Mental Test Scores. Reading,* Mass.: Addison-Wesley.

McDnald, R. P. (1981). The dimensionality of test and items. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 34,* 100-117.

Miller, M. B. (1995). Coefficient alpha: A Basic introduction from the perspectives of classical test theory and structural equation modeling. *Structural Equation Modeling, 2,* 255-273.

Mulaik, S. A. (1972). *The Foundations of Factor Analysis.* McGraw-Hill.

Novick, M. R. (1966). The axioms and principal results of classical test theory. *Journal of Mathematical Psychology, 3,* 1-18.

Novick, M. R. & Lewis, C. (1967). Coefficient alpha and the reliability of composite measurements. *Psychometrika, 32,* 1-13.

Peel, E. A. (1948). Prediction of a complex criterion and battery reliability. *British Journal Psychological Statistical Sectiion,* 1 84-94.

Rao, C. R. (1955). Estimation and tests of significance in factor analysis. *Psychometrika, 20,* 93-111.

芝　祐順 (1979). 因子分析法（第二版）　東京大学出版会

Ten Berge, J. M. F. (2000). Clarification of Cliff and Caruso (1998). *Psychological Methods,* 5, 228-229.

Ten Berge, M. F., & Hofstee, K. B. (1999). Coefficients alpha and reliabilities of unrotated and rotated components. *Psychometrika, 64,* 83-90.

辻岡美延 (1964). テスト尺度構成における新しい原理　―因子的真実性―　心理学評論, 8, 82-92.

辻岡美延・藤村和久 (1975). 質問紙法性格検査における社会的望ましさの因子について　教育心理学研究, 23, 69-77.

辻岡美延他 (1975a). 確認的因子分析における検査尺度構成。　関西大学社会学部紀要, 6, 1, 1-90.

辻岡美延他 (1975b). 確認的因子分析による行動予測の研究　関西大学社会学部紀要, 7, 95-211.

辻岡美延他 (1977). 確認的因子分析に基づく因子得点の利用　関西大学社会学部紀要, 8, 75-156.

辻岡美延・清水和秋・柴田　満 (1979). 確認的因子分析による構成概念の不変性と普遍性　――般Factormax法による比較形質学への提案―　関西大学社会学部紀要, 10, 101-146.

辻岡美延・柴田　満 (1983). 確認的因子分析のための総合確認システムI　―Patternmax型解法と総合評価システム--　関西大学社会学部紀要, 14, 149-179.

柴田　満・辻岡美延 (1983). 確認的因子分析のための総合確認システムII　―Factormax型解法と総合評価システム--　関西大学社会学部紀要, 15, 145-186.

Werts, C. E., Rock, D. R., Linn, R. L., & Jöreskog, K. G. (1978). A general method of estimating the reliability of a composite. *Educational and Psychological Measurement, 38,* 933-942.

（受付2001. 10. 10）