中学校の求積問題と敷き詰める活動の関係について

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2019-02-28 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 田村, 壽 メールアドレス: 所属:
URL	https://osaka-shoin.repo.nii.ac.jp/records/4369

中学校の求積問題と敷き詰める活動の関係について

児童教育学部　児童教育学科　田村　壽

要旨：本論文は、小学校算数科における敷き詰める活動が中学校で指導される求積問題を解くうえで重要な役割を果たしていることを示したものである。最初に、敷き詰める活動と図形の多様な見方について示す。次に、学習指導要領や教科書に扱われている敷き詰める活動と図形の多様な見方について示す。最後に、図形の多様な見方と中学校の求積問題の解法との関連性を示す。

キーワード：敷き詰める活動、図形の構成・分解、図形の多様な見方、求積問題

1　はじめに

小学校算数科や中学校数学科には、補助線を引いて求める求積の問題がある。補助線を引いて図形を分割したり他の図形に変形したりするアイデアは図形の多様な見方ができる力と関連していると考える。この図形の多様な見方は、小学校 1 年から行われる敷き詰める活動と関係があると考える。ここでは、学習指導要領や教科書を参考に敷き詰める活動を系統的に示し、そこで養われる図形の多様な見方が小学校算数や中学校数学の求積の問題を解くうえで深く関わっていることを示す。

2　豊かな図形の感覚と図形の多様な見方

小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説算数編の「B図形」領域のねらいの中に、「基本的な図形や空間の概念について理解し、図形についての豊かな感覚の育成を図るとともに、図形を構成したり、図形の面積や体積を求めたりすること」と示されている[1)]。図形についての感覚については、小学校学習指導要領（平成 20 年 8 月）解説算数編に、ものの形を認める感覚や形の特徴をとらえたり性質を見付けたりする感覚などと示している[2)]。また、算数教育指導用語辞典には、数量や図形についての感覚は、数や図形についての多様な見方、とらえ方、さらには適切にことがらを見積もったりするときにはたらく感覚であるとしている。また、図形についての感覚とは、図形を理解したりおおよその大きさや形を把握したりすること、さらに図形に対する新しい見方をするときに役立つ感覚であると述べられている[3)]。つまり、豊かな図形の感覚とは図形を多様な見方をするときにはたらく感覚である。

田村(2017)は、数の多様な見方として数の合成・分解をしたり、一つの数を他の数の和や積としてみたりするなど、他の数と関連づけてみると述べている[4)]。

ここでは、数の多様な見方と対応させて考え、図形の多様な見方を「図形を構成・分解したり、一つの図形から他の図形を見つけたりするなど、他の図形と関係づけて捉える見方」とする。

3　敷き詰める活動と図形の構成・分解

田村(2017)は、三角形、平行四辺形、台形、ひし形などの求積で使われる等積変形、倍積変形、分割といった方法を用いられるようにするには、第 1 学年からの敷き詰める活動が重要であると述べている[5)]。

敷き詰める活動とは、合同な図形の色板などを辺がぴったり重なるように敷き詰める活動などである。敷き詰められた模様を使って他の図形を見つけたりする活動も含まれる。

小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説算数編には、図形の構成とは身の回りの物や色板などを使って図形を作ったり図形を分解したりすることとあり[6)]、図形を分解することも含まれている。算数教育指導用語辞典には、図形の構成として、線構成、面構成、立体構成の三つを示している。線構成とはひごやひもなどで形を作ることであり、面構成とは色板や色紙など平面的なものを利用して形を作ることであり、立体構成とは積み木や粘土などの立体的なものを使って形を作ることであると示されている[7)]。

図形の分解とは構成の逆を示し、図形を直線や平面的な図形に分けていくことである。平面図形の求積問題を考える際には、図形を構成したり分割したりする活動を場合に応じで行うので、図形の構成と分解を違うものとして示す。

したがって、敷き詰められてできた模様の中にあるいくつかの図形から他の図形を捉えることは図形の構成と考える。また、図形を直線などでいくつかの図形に分けることは図形の分解と考える。

3-1　各学年の敷き詰める活動と図形の構成・分解

小学校学習指導要領（平成29年告示）解説算数編（以下学習指導要領）と新興出版社啓林館の教科書「わくわく算数」（以下教科書）を参考に敷き詰める活動と図形の構成・分解とを学年ごとに示す。

① 第1学年

学習指導要領には、直角二等辺三角形の色板を用いて基本的な形づくりの例として、図3-1-1のような、ましかく(正方形)やながしかく(長方形)を示されている。色板での形づくりでは、「しかく」は「さんかく」二枚で構成できること、「ましかく」が二つで「ながしかく」が構成できることなどに児童が気付けるよう配慮するとある[8]。

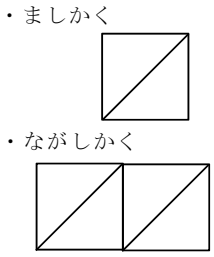
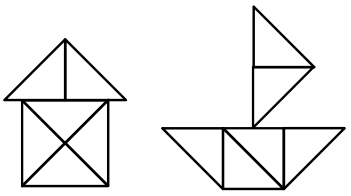
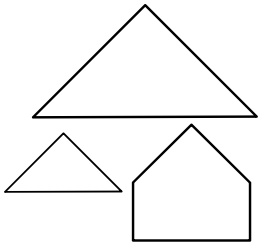


図3-1-1

教科書には、図3-1-2のような直角二等辺三角形の色板で家やヨットなどの形が作られた絵が示されている。児童が色板で示された形を作る活動を通して、家の形では、2枚の色板で大きな直角二等辺三角形ができていたり4枚の色板で正方形ができていたりすることに気付かせる。また、図3-1-3のような大小の三角形や五角形などの影絵を示し、その中に色板を並べる活動もある[9]。


図3-1-2


図3-1-3

これらの敷き詰める活動を通して、並べた図形の中の直線を見ないで図形を捉えたり図形の中にない直線を見て図形を捉えたりする力を育てようとしている。

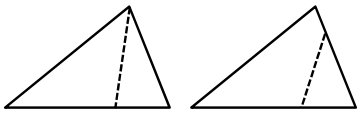
② 第2学年

第2学年で正方形、長方形、直角三角形を学習する。

学習指導要領には、敷き詰めるなどの操作的な活動を通して、平面の広がりについての基礎となる経験を豊かにすることが示されている[10]。

教科書には、正方形、長方形、直角二等辺三角形の色紙を隙間なく敷き詰めてできた模様から、大きさや形の異なる正方形、長方形、直角三角形を見出すものがある[11]。平面図形の広がりについて理解すること、図形に関する性質を見いだすことが大切である。平面図形の広がりは、第4学年で学習する面積につなげるために必要である。

また、図3-1-4のように、敷き詰める活動ではないが三角形の色紙を1本の直線にそって切り、二つの三角形に分割したり三角形と四角形に分割したりする活動がある[12]。これは、図形が直線によって二つの図形に分解されたり二つの図形によって三角形に構成されたりできることに気付かせる活動である。

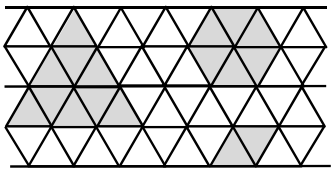

図3-1-4

③ 第3学年

この学年では、二等辺三角形、正三角形を学習する。

学習指導要領には、合同な二等辺三角形や正三角形を敷き詰めてできた模様を観察することによって、その中にほかの図形を認めること、平面図形の広がりや図形の美しさを確認することなど、図形についての見方や感覚を豊かにしていくことが示されている[13]。

教科書には、図3-1-5のような合同な正三角形を敷き詰めた模様から大きな正三角形、正六角形、ひし形などを見出す活動がある。合同な二等辺三角形を敷き詰める活動では、大きな二等辺三角形、平行四辺形、ひし形などを見出したりする活動もある[14]。


図3-1-5

④ 第4学年

この学年では、垂直、平行、台形、平行四辺形、ひし形について学習する。

学習指導要領には、台形を敷き詰める活動から、平面を敷き詰められること、平行四辺形が認められること、四つの角が1か所に集まり360度になっていること、図形の美しさなどに触れることなどが大切である

と示されている[15)]。

教科書には、平行四辺形、ひし形、台形で敷き詰める活動がある[16)]。ここでは、これらの四角形でも敷き詰められることや敷き詰めた模様の中に他の図形を見出したり、平行線の性質に気付いたりすることによって、図形の多様な見方の育成が図られる。

⑤ 第5学年

この学年では、図形の合同や三角形、四角形の角や正多角形について学習する。

学習指導要領には、合同な三角形によって平面を敷き詰めることが出来ることを確かめ、敷き詰めた図形の中にほかの図形を認めたり、平行線の性質に気付いたりするなどの活動がある[17)]。

また、三角形や四角形などの内角の和の求め方を考える内容がある。三角形の内角の求め方には、いくつかの三角形の内角の和を分度器で180度であることを帰納的に見つける方法がある。教科書では、図3-1-6のように、合同な三角形を横に並べて敷き詰め、一点に三つの異なる内角が集まって一直線になっていることをみつけて180度であることを確認する[18)]。一つの三角形を考えるときに他の合同な三角形と関係付けて考える図形の多様な見方を活用する。

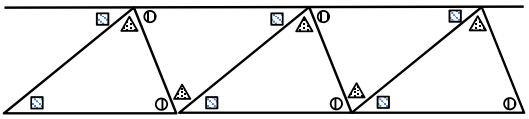


図3-1-6

四角形の内角の和は、図3-1-7のように、四角形ABCDの頂点A、Cを結び二つの三角形に分割して考えたり、図3-1-8のように、四角形ABCDの内部の点Eと各頂点を直線で結んで四つの三角形に分割して考えたりして求める。

ここでは、見えない直線を見て四角形をいくつかの三角形でできていることを見つける図形の多様な見方が必要になる。

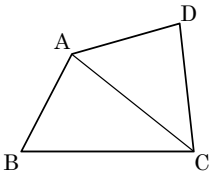


図3-1-7

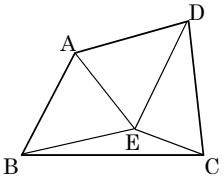


図3-1-8

⑥ 第6学年

学習指導要領には、図形で敷き詰めるなどの操作活動は示されていない。しかし、円の面積の求め方では、円を中心から等分して並び替えて平行四辺形を作り、面積を求める方法が示されている[19)]。ここでも、今まで敷き詰めるなどの操作活動で培われてきた図形を分解したり構成したりして図形を捉えるという図形の多様な見方が使われている。

以上のことから、第1学年から第6学年までの図形の内容には、敷き詰められた図形の模様から、見えている直線をないものとして複数の図形から他の図形を捉えたり、見えていない直線をあるものとして一つの図形を分割して複数の図形を捉えたりすることが行われる。これは図形の多様な見方である。

3-2　図形の多様な見方と図形の求積

図形の求積は第4学年から学習する。

第1学年では大きさ比べについて直接比較、間接比較、任意単位による比較を学習する。第4学年からは、基本的な図形の求積について学習する。そこでは敷き詰める活動を通して得られた図形の広さや構成したり分解したりして図形を捉えるという図形の多様な見方を活用する。

ここでは、第4学年から第6学年までの求積の内容と図形の多様な見方について述べる。

① 第4学年

正方形と長方形の面積について学習する。

面積の学習は、長方形と正方形の広さ比べの直接比較から1辺1cmの正方形を単位とした測定へと発展する。図3-2-1のように、正方形や長方形を1cm方眼上に示し、1辺が1cmの正方形が敷き詰められていることを認識させ、その正方形の個数を使って広さを数値化する。

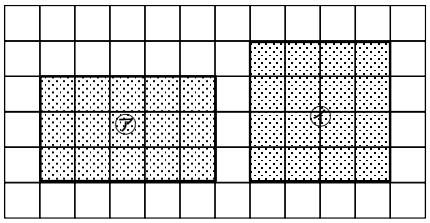


図3-2-1

ここでは、長方形や正方形が単位となる正方形によって敷き詰められているという見方が大切になる。つまり、図形を単位となる正方形によって構成されているという見方が必要である。

また、図3-2-2のように、L字型の図形を、二つの長方形に分割して面積を求めたり、大きい長方形から小さい長方形をとった形と捉えてたりして求める。面積を求める図形が、二つの小さい長方形に分割されているという見方や、求める図形に小さい長方形を補完して大きい長方形を構成する図形の多様な見方が必要になる。

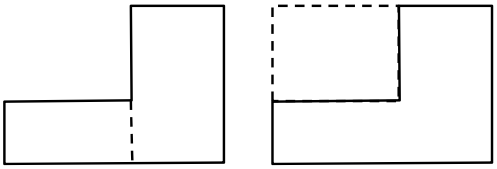


図 3-2-2

② 第５学年

三角形、平行四辺形、台形、ひし形の面積について学習する。

正方形や長方形の求積公式を活用するため、図形を分割したり変形したりする。

図 3-2-3 のように、三角形の求積では、三角形を二つの直角三角形に分割し、それぞれの直角三角形を長方形の半分と見る。また、三角形の一部を分割して移動させて長方形を作る。これらは、図形を分割したり構成したりする図形の多様な見方をしている。

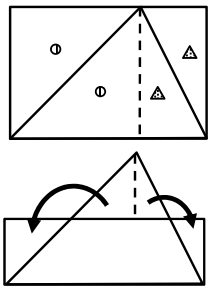


図 3-2-3

また、図 3-2-4 のように、平行四辺形の求積では、平行四辺形を対角線で合同な二つの三角形に分割して三角形の求積公式を活用したり、平行四辺形の一部から直角三角形を見出し移動させて長方形に変形したりする。ここでは、第４学年での三角形を敷き詰めた中から平行四辺形を見出したり直角三角形を敷き詰めた中から長方形や平行四辺形を見出したりする図形の多様な見方が生かされる。

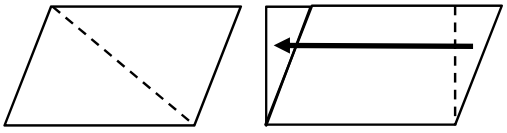


図 3-2-4

③ 第６学年

この学年では、円の面積について学習する。

円を直径で合同なおうぎ形に分割し移動して平行四辺形を作り既習の公式を活用する。

また、教科書には、図 3-2-5 のように、正方形の中におうぎ形が二つ重なった複合図形の求積がある[20)]。図 3-2-6 は正方形の面積からおうぎ形の面積を引くという考えがある。ここでは、正方形の中にある二つの弧の一つを見ないで一つのおうぎ形があると考えている。つまり、あるものをないものとして見る力である。ま

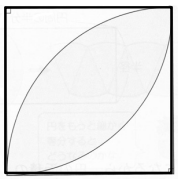


図 3-2-5

た、図 3-2-7 は、正方形に対角線を１本引き、おうぎ形の面積から直角三角形の面積を引くという考えがある。つまり、正方形を合同な直角二等辺三角形に分割するという図形の多様な見方をしている。

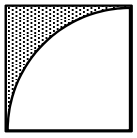


図 3-2-6

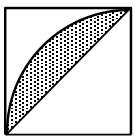


図 3-2-7

4　図形の多様な見方と中学校数学の求積問題

求積問題と図形の多様な見方とのかかわりをいくつかの問題で示す。

4-1　図形の多様な見方と求積問題

図 4-1-1 において、四角形ABCDは１辺が４㎝の正方形である。Eは辺DC上の点でありDE=１㎝である。Fは直線ADと直線BEとの交点である。△FECの面積の求め方とそこで使われる図形の多様な見方とのかかわりを示す。

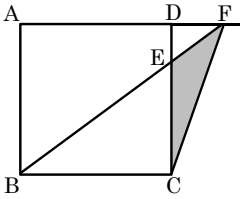


図 4-1-1

一つ目は、△FBCの面積から△EBCの面積を引いて求める方法である。△FECの面積を求めるのに必要な底辺をECとすると３㎝であることが分かるが、高さが分からない。そこで、△FBCは△FECと△EBCで構成されていることを見つける。△FBCの面積は底辺と高さがともに４㎝だから８㎠であり、△EBCの面積は底辺が４㎝、高さが３㎝だから６㎠である。よって、△FEC＝△FBC－△EBC＝２㎠が求められる。

△FECが直接公式を使って求積できない図形であり、△FBCと△EBCは直接公式を使って求積できる図形である。ここでは、線分ECがないものとして△FBCを捉え、線分ECをあるものと捉えて△FECと△EBCを捉える図形の多様な見方が必要になる。また、第４学年で学習する図 3-2-2 のL字型の図形を求める場合と同じである。L字型という直接公式を使って求積できない図形を小さい長方形を補完させて求積できる長方形に変形する考えと同じである。

二つ目は、図 4-1-2 のように正方形ABCDに対角線BDを引き、△FBCと△DBCを考える。底辺も高さも共通より△FBC－△EBC＝△DBC－△EBCとなるから△FEC＝△DBEになる。△DBEは底辺DE＝１㎝、高さ４㎝であるので面積２㎠が求められる。

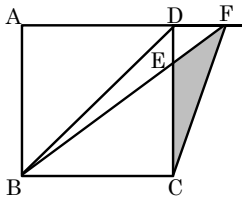


図 4-1-2

これは見事なアイデアを使った解法である。正方形を対角線によって合同な直角二等辺三角形に分割するという考えは、第６学年で学習するおうぎ形と正方形の複合図形の面積を求めるときの考えと同じである。この対角線を引くというアイデアは、小学校低学年から敷き詰める活動から得られる構成したり分解したりして図形を捉えるという図形の多様な見方から得られたものである。

4-2　図形の多様な見方と中学校数学の求積問題

中学校で学習する関数$y=ax^2$と相似な図形での求積問題について図形の多様な見方との関係を示す。

① 関数$y=ax^2$における求積問題

次の中学校第３学年の教科書の問題を考える[21)]。

図 4-2-1 は、$y=x^2$のグラフで、A（－1,1)、B(3, 9)、C（0,2）である。このとき、△AOBの面積を求める問題を考える。これは、図形の多様な見方ができない中学生にとって難しい問題である。

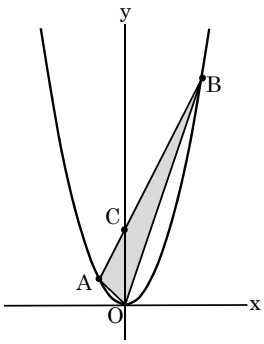


図 4-2-1

△AOBは直接公式を使って求積できない図形である。そこで、△AOCと△BCOに分割して考えるとどちらも直接公式を使って求積できる図形になる。△AOCは底辺をOCとすると３、高さは１になり、△BCOの底辺をOCとすると３、高さは３になるので、△AOCの面積は６になる。これは、第４学年で学習するL字型の図形の求積の分割する方法と同じである。

② 相似な図形の面積における求積問題

図 4-2-2 において、△ABC∽△A'B'C'であり、相似比が１：２である。このときの△ABCと△A'B'C'の面積比を求める問題を考える。

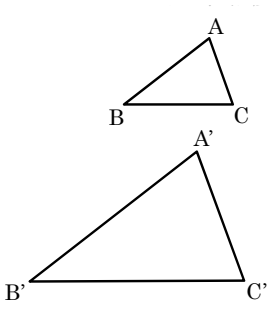


図 4-2-2

面積比は、底辺と高さを文字で表して１：４になることを示す。しかし、図 4-2-3 のように、△A'B'C'を分割して△ABCが四つあることを示すと視覚的に面積比が１：４になることが捉えらる。

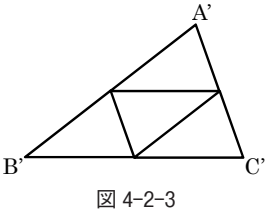


図 4-2-3

△A'B'C'の３辺の中点を直線で結ぶ補助線を考えるアイデアは小学校第１学年や第３学年で経験した詰め活動で得られた図形の多様な見方が生かされる。

このように、見えない直線を見たり見えている直線を見なかったりして図形を構成・分解して図形を捉える図形の多様な見方が必要である。

5　おわりに

小中学校の連携や一貫教育が言われているなかで、小学校算数と中学校数学との関係を深めることは必須である。図形の学習において、小学校で行われている図形を敷き詰める活動で得られる図形の多様な見方が中学校数学における求積問題を解く場合に必要とされることを念頭において指導することが大切である。

参考文献

１）文部科学省(2018)小学校学習指導要領解説算数編　日本文教出版　p.50
２）文部科学省(2008)小学校学習指導要領解説算数編　東洋館出版　p.40
３）日本数学教育学会出版社(2009)算数教育指導用語辞典　教育出版　p.186
４）田村壽(2018)「高校入試問題と小学校算数科の内容の関わり」－根号を含む数の計算と単位の考え、数についての感覚との関りについて－　樟蔭教職研究
５）田村壽(2017)「三角形、平行四辺形の求積公式を導く際の順序と用いる方法」　大阪樟蔭女子大学研究紀要
６）前掲１）　p.53
７）前掲３）　p.121
８）前掲１）　p.89
９）わくわくさんすう１ 新興出版社啓林館　pp.96-97
10）前掲１）　p.120
11）わくわく算数２下　新興出版社啓林館　p.53
12）前掲11）　p.44
13）前掲１）　p.161
14）わくわく算数３下　新興出版社啓林館　p.11
15）前掲１）　p.203
16）わくわく算数４上　新興出版社啓林館　p.77
17）前掲１）　p.251
18）わくわく算数５　新興出版社啓林館　p79
19）前掲１）　p.298
20）わくわく算数６　新興出版社啓林館　p.72
21）未来へひろがる数学３　新興出版社啓林館　p.224

Relation Between the Comprehension of Mensuration in Junior High School and the Activity in Which Students Spread Objects to Fill a Given Space

Faculty of Childhood Education, Department of Childhood Education
Hisashi TAMURA

Abstract

This article shows that the activity in which students spread objects to fill a given space in elementary school mathematics is important to aid the comprehension of mensuration in junior high school. First, I explain the activity and a variety of viewpoints of the shape of the objects in general. Then, I explain the activity and a variety of viewpoints of the shape of the objects according to the Course of Study and a textbook. Finally, I talk about relation between a variety of viewpoints of shapes and the comprehension of mensuration in junior high school.

Keywords: activity in which students spread objects to fill a given space, constitution and the resolution of the figure, a variety of viewpoints of shapes, mensuration