

The Teaching Materials Development of Isometric Transformations for High School Mathematics

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2016-01-31 キーワード (Ja): キーワード (En): Matrices, Isometric Transformations, Interest, Creation, Multidirectional Viewpoint 作成者: MATSUOKA, Manabu メールアドレス: 所属:
URL	https://osaka-shoin.repo.nii.ac.jp/records/4037

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



距離の不変性をもつ行列を題材とした高校数学における教材開発

児童学部 児童学科 松岡 学

要旨：本研究の目的は等長変換を用いた教材を通して、高校生に数学への興味・関心をもたせることである。旧課程における行列には、それまでの高校生が習わない新しい概念がいくつも含まれている。例えば、非可換性、べき零性、線形性などである。これらの豊富な内容を高校生に有効に伝える1つの手段として、筆者が等長変換を題材にして作成した教材を考察する。教材の特徴として、解答が多彩なことが挙げられる。次に、筆者の以前の勤務校において授業実践を行った結果を報告する。新課程においては行列が姿を消したが、行列の重要性を本論文において改めて探りたい。

キーワード：行列、等長変換、興味・関心、創造性、多角的な視点

1 研究目的

高校数学における旧課程「数学C」で登場する行列は、それまでに高校生が学習してきた数学とは違う、まったく新しい概念がいくつも含まれている。例えば、次のようなものがある。

①積の非可換性

- ・ $AB = BA$ とは限らない。
- ・ $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$
は、一般にこれ以上計算できない。

②零因子（または、べき零性）

- ・「 $AB = 0$ のとき $A = 0$ または $B = 0$ 」とは限らない。
- ・「 $A^n = 0$ かつ $A \neq 0$ 」である A が存在する。

③線形性

- ・ $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$, $f(k\alpha) = kf(\alpha)$

これらのように行列には、それまでの高校数学にはない新しい概念がいくつも含まれており、非常に興味深い分野であるといえる。そのような中で、本研究においては「距離を保つ行列」に注目して、高校生に興味を持たせる有効な教材開発を試みた。これらを通して、高校生の行列への理解が定着し、さらに、行列に深い興味をもたせることが、本研究の目的である。

2 教材開発の内容

(1) 教材開発のねらい

高校数学の現場において、時として問題の解法パターンを暗記させることが中心の指導法に陥ることがある。

しかし、数学の指導において重要なのは、自由な発想力や創造性を培い、数学への興味・関心を育てることである。そのようなことを踏まえて、本研究では次の3点に重点を置いて教材を開発した。

①興味・関心の育成

教材を作成するとき、「数学的に魅力的な題材」であることは重要である。本研究においては、題材として「大きさを保つ1次変換」を選ぶことにした。それは、とても奥が深く、大変魅力的な数学の対象であると筆者が考えているからである。

②自由な発想

問題を解く際「・・・を求めなさい。」というような問題文であると、ただ単に指示に従って解いているにすぎない。計算技術的な側面も大事であるが、本教材においては「あなたが思いつくことを自由に書きなさい。」という問題文にすることで、生徒自身に考えさせることを意図とした。

③多角的な視点

多角的な視点については、問題を解く際に1つの解法のみを指導するのでは、どうしても暗記的な部分がある。そこで、別解が出来る限り多い題材を選んだ。それにより、生徒自身で自由に解法を探すことができるような教材とした。

(2) 教材の内容

本研究においては、「表1」にあるような問題プリントを作成した。

表1 問題プリント1

行列 問題プリント1

問題1

1次変換 f について、点 P の f による像を Q とする。「任意の点 P に対し、 $OP = OQ$ 」・・・(*)が成り立つとき、1次変換 f を「大きさを保つ(距離を保つ)1次変換」という。大きさを保つ1次変換 f を表す行列を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して(または、1次変換 f に対して)、あなたが思いつくことを自由に書きなさい。

(解答例)

①関係式を導く

 $OP > 0, OQ > 0$ より $OP = OQ$ と $OP^2 = OQ^2$ は同値である。ここで、 $P = (x, y)$ とすると、

$$Q = (ax + by, cx + dy)$$

 $OP^2 = OQ^2$ から

$$x^2 + y^2 = (ax + by)^2 + (cx + dy)^2$$

$$x^2 + y^2 = (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (b^2 + d^2)y^2$$

この式はすべての x, y において成り立つので、 x, y に関する恒等式である。従って、 $a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1, ab + cd = 0$

よって、

 a, b, c, d の間には次のような関係式が成り立つ。「 $a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1, ab + cd = 0$ 」②行列 A を決定する。①から $(a, c) \perp (b, d)$ であり、 $(a, c), (b, d)$ の大きさは共に1となる。ゆえに、 $a = \cos \theta, c = \sin \theta$ と表すことができる。ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ を 90° 回転させたものが $\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$ 、 -90° 回転させたものが $\begin{pmatrix} c \\ -a \end{pmatrix}$ より、 $b = -\sin \theta, d = \cos \theta$ または $b = \sin \theta,$ $d = -\cos \theta$ と表される。よって、行列 A は、次のようになる $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$: 回転移動を表す行列、または、 $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$: 対称移動を表す行列

表2 対称移動を表す行列

(参考)

直線 $y = mx, (m = \tan \alpha)$ に関する対称移動を表す行列は

$$\frac{1}{m^2 + 1} \begin{pmatrix} -m^2 + 1 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \text{ である。}$$

③1次変換の性質に注目した考察

 f は大きさを保つ1次変換であるので、明らかに円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点を同じ円上の点に移す。(⑤より行列式が0でないので、 f は全単射であるので、移り先は円上の任意の点を表す。)逆に、 f を円 $x^2 + y^2 = 1$ を自分自身に移す1次変換とする。任意のベクトル $\vec{x}$ に対して、大きさを $|x|$ と表すと、

$$A\vec{x} = A\left(|x|\frac{\vec{x}}{|x|}\right) = |x|A\frac{\vec{x}}{|x|}$$

ここで $\frac{\vec{x}}{|x|}$ は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点より、その移り先 $A\frac{\vec{x}}{|x|}$ も円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点であり、大きさは1である。よって、 $|x|A\frac{\vec{x}}{|x|}$ の大きさは $|x|$ である。すなわち、 $A\vec{x}$ と $\vec{x}$ は大きさが等しいので、 f は大きさを保つ1次変換である。

以上のことから、次のことが分かる。

「 f は、円 $x^2 + y^2 = 1$ を自分自身に移す1次変換である。逆に、円 $x^2 + y^2 = 1$ を自分自身に移す1次変換は f である。」

④距離を保つことの証明

点 P, Q の f による像を P', Q' とする。2点 P, Q の間の距離は、ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ の大きさに等しい。また、行列 A は大きさを保つので、 $\overrightarrow{PQ}$ と $A\overrightarrow{PQ}$ は、大きさが等しい。

ここで、

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{PQ} &= A\overrightarrow{OQ} - A\overrightarrow{OP} \\ &= \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{P'Q'} \end{aligned}$$

よって、1次変換 f は、任意の2点の距離を保つ。

⑤行列式の値を求める。

①より $a^2+c^2=1$, $b^2+d^2=1$, $ab+cd=0$ 。

また、恒等式

$$(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2+(ad-bc)^2$$

より $(ad-bc)^2=1$ となり、 $ad-bc=\pm 1$ 。

すなわち、行列式 $\Delta(A)=ad-bc$ の値は、 $\Delta(A)=\pm 1$ である。

(⑤の別解)

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

①より、次の式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

ここで、行列式の性質

$\Delta(AB)=\Delta(A)\Delta(B)$ を使う。

(*) の両辺の行列式を取ること、

$(\Delta(A))^2=\Delta(E)$ となり $(\Delta(A))^2=1$ 。

よって、 $\Delta(A)=\pm 1$ を得る。

3 作成した教材による授業実践

筆者の勤務高校である三重県立四日市高等学校3年生、普通科理系クラス36名に対して、2008年7月に「問題プリント1」を行い、事後アンケートを実施した結果を報告する。四日市高等学校においては、例年3年生の4～5月で行列分野の学習を終える。行列の学習を一通り終えた後であるため、実施時期としても適当であると思われた。

(1) 問題1の実施結果

36名の解答を回収し、答案を丹念に調べた。完全な解答ではなく、計算式がいくつか書いてあるだけであったり、証明なしの記述であったり、まとまりのないものがほとんどであったが、それらを分類すると、次の「表1」ようになった。

表3 問題プリント1の実施結果（人数は重複あり）

解答例1の関係式	6名
回転移動について記述	5名
対称移動について記述	2名
円という言葉を書いた	6名
$ad-bc$ （行列式）について記述	2名
その他	12名
白紙	4名

生徒は普段、計算問題やパターン的な問題に慣れているため、本問題の「思いつくことを自由に書きなさい。」という指示に最初は戸惑っていた。生徒の解答を見ると、完璧な解答は少なかったが、解答例1の関係式や、回転移動、対称移動、行列式など、様々な観点から記述を試みており、こちらの意図はある程度達成されたと思われる。

解答例の中では、解答例1の方針に従って解こうとしていた生徒が多かった。やはり、生徒は普段から問題演習で訓練されているため、成分に直して計算を行うことに慣れているのだろう。欲をいえば、もう少しバラエティに富んだ解答を期待したのだが、仕方ないのかもしれない。このとき、関係式

$$[a^2+c^2=1, b^2+d^2=1, ab+cd=0]$$

まで到達した生徒は6名中4名であった。関係式

$$[a^2+c^2=1, b^2+d^2=1, ab+cd=0]$$

にたどり着いた4名は全員、さらに計算を続けようとしていた。「どこまでも計算を続けようとする姿勢」もこちらが育てたい観点である。

回転移動について記述した生徒が5名、対称移動について記述した生徒が2名いた。大きさを保つ1次変換が、回転移動または、対称移動であることを正確に証明することはかなり大変であるが、このようなことに気づくことは重要である。着眼点としては素晴らしいと思われる。

解答例3にあるように、大きさを保つ1次変換と円とは密接な関係がある。解答例3のような完全な解答を記述するのは難しいが、その関係性に気づくだけでも意味があると思われる。本研究において、円という言葉を書いた生徒は6名いたが、こちらの予想以上に多かった。

行列を特徴づける量として行列式があるが、行列式について記述した生徒は2名であった。さすがに、「大きさを保つ行列」ということと「行列式」がすぐには結びつかなかったのだろう。

その他においては、間違った式変形やまったく関係のない事柄、漠然とした式変形など、様々な答案が存在した。ただ、たとえ間違っていたとしても、自分の力でいろいろ考えて試行錯誤すること自体は、無意味なことではなく、「意味のある数学的な体験」であると思われる。そのような姿勢を育てたいというのも、本研究のねらいの1つである。

実際の生徒の解答の中からいくつかを「表4」「表5に」挙げておく。

表 4 生徒の解答例

(生徒 A) 大きさを保つ 1 次変換 f を表す行列 A は、O を中心とする回転行列あるいは、$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ や、x 軸、y 軸、原点、$y = x$ に関して対称をとるもの $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ではないか。 (生徒 B) $a = d = x, b = c = 0$ のとき 行列 A は、$A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = x^n E$ となる。 (生徒 C) ハミルトン・ケーリーの定理から $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ $x' = ax + by, y' = cx + dy$ から $a = \frac{x' - by}{x}$, $b = \frac{x' - ax}{y}, c = \frac{y' - dy}{x}, d = \frac{y' - cx}{y}$ これらを代入し $a + d = \dots$ $ad - bc = \dots$

生徒 A の解答については、証明は書かれていなかったが、大きさを保つ 1 次変換 f についてここまで予想できたら、十分だと思われる。素晴らしい数学的な洞察力である。また、まだ証明前なので「・・・である。」のように決めつけずに、「・・・ではないか。」と推測的な記述をしている所もよい。非常に数学的な記述である。

生徒 B の解答については、受験数学の演習で、普段行列の n 乗を求める練習をしている影響だろうか？「自由に書きなさい。」という問題とはいえ、まったく予想していなかった解答であった。数学的に自由に解答を組み立てる姿勢はよいが、この場合、一般に行列 A は大きさを保つ 1 次変換 f にならっていない。定義をしっかりと確認する必要がある。

生徒 C の解答については、ハミルトン・ケーリーの定理を題材としている。大きさを保つ 1 次変換とハミルトン・ケーリーの定理の関係については、筆者の用意した模範解答にはないが、もしなんらかの関係を発見したなら、それは素晴らしいことである。ただし、生徒 C の場合、 $a + d$ や $ad - bc$ に代入し、ひたすら計算を続けていた。結果的に、何も有益な計算結果は得られなかったが、「泥臭い計算を続けること」にも意味があると思われる。型にはまった模範解答を暗記するだけが数学の学習ではないからである。

表 5 誤答例

(生徒 D) 大きさを保つので $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (生徒 E) $OP = OQ$ より $AOP = AOQ$ (生徒 F) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ (生徒 G) 点 P の軌跡は円を描く。 (生徒 H) f は、原点を中心とする回転移動である。
--

次に誤答例について考察を行う。生徒 D の解答については、行列 A は恒等変換を表す行列、つまり単位行列になる。または、固有値 1 をもつ行列とその固有ベクトル（不動点）を表しており、本問題の題材と少しずれている。

生徒 E の解答については、大きさ OP とベクトル $\overrightarrow{OP}$ の区別ができておらず、表現方法が間違っている。

生徒 F の解答についても、記述が間違っている。一般に、一次変換による点の移り方は、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となる。そのあたりの理解が曖昧な解答である。

生徒 G の解答については、表現が不十分である。点 P の軌跡が円なのではなく、「円の移り先が円になる。」のである。ただ、大きさを保つ 1 次変換が「円」と関係があることを見抜いた点については、よい洞察力をもっているといえる。あとは、数学的に「伝えたい気持ち」を数式で表し、論理的に表現する手法が必要である。

生徒 H の解答については、「 f は対称移動、または、原点を中心とする回転移動」が正しい表現であるので、誤答ではあるが、回転移動であることを見抜いただけでも意味があると思われる。ただ、生徒 H については、「回転移動である。」と書かれていただけで、証明を試みた跡がなかったことが少し残念である。

「 f は、原点を中心とする回転移動であることを証明したい。」とし、証明を試みるのが、数学的な姿勢としては大事である。もしくは、「大きさを保つ 1 次変換の具体例としては、回転移動がある。」とい

う表現の方が適切である。具体例をいくつか挙げていき、そこから一定の法則を抽出するという手法も数学的には重要であるからである。

(2) アンケート結果

問題プリント1を実施した後、簡単な解説を行い、アンケートを行った。質問項目は、

「1. 大きさを保つ（距離を保つ）1次変換について、よく理解できましたか？」

表6 アンケート結果「1. 理解できましたか？」

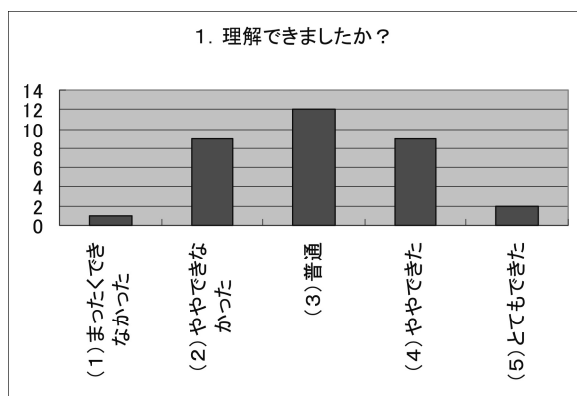


表7 アンケート結果「2. 興味深いと思いましたか？」

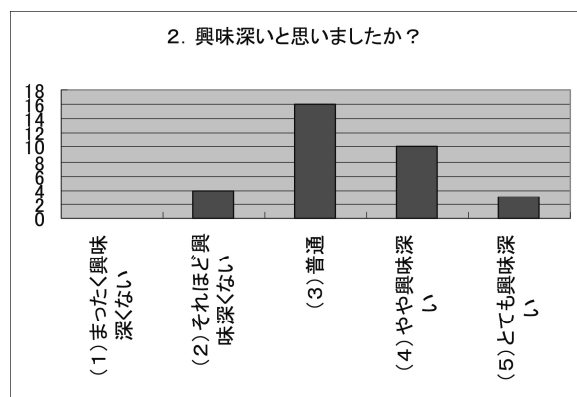
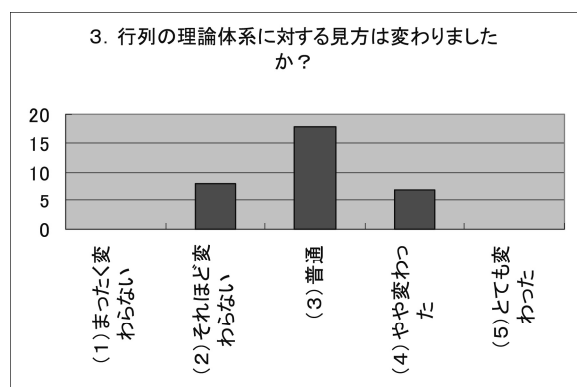


表8 アンケート結果「3. 行列の理論体系に対する見方は変わりましたか？」



「2. 大きさを保つ（距離を保つ）1次変換について、興味深いと思いましたか？」

「3. 行列の理論体系に対する見方は変わりましたか？」である。

その結果が「表6」「表7」「表8」である。

「理解できましたか？」の問いに関しては、普通が一番多く、次に、「やや理解できた」と「やや理解できなかった」がほぼ同数となっている。内容的に、かなり発展的な事柄を扱っているのも、その理解度が心配されたが、この結果なら悪くはないと思われる。このような発展的な内容の場合、一步間違えると「まったく理解できなかった」が多数派となる危険も含んでいるからである。欲をいえば、「理解できた」「やや理解できた」がもう少し欲しい所であるが、それは今後の課題である。

一方、「興味深いと思いましたか？」の問いに関しては、「普通」が一番多いものの、理解度に比べると「やや興味深い」「とても興味深い」の項目の人数が増え、両方合わせると40%弱の生徒が、本題材に興味を示したことになる。このことから、本研究の題材として、大きさを保つ1次変換を選択したことは適切であったことが分かった。内容的にやや発展的な部分を含むものの40%弱の生徒が興味を示したことは1つの成果であるといえる。そして、「それほど興味深くない」が若干いるが、「まったく興味深くない」が0名であったことは、注目すべき結果であるといえる。「高校生に数学の魅力を伝えたい」というのが本研究の動機であるが、このアンケート結果により、一定の収穫があったのではないと思われる。

「行列の理論体系に対する見方は変わりましたか？」の問いに関しては、理解度の問いと同様、「普通」を中心に、ほぼ左右対称の結果となった。本研究の授業実践は、今回は単発的に1回行っただけであるため、まだ行列全体の見方を変えるまでには至っていない。しかし、このような授業を何回か行うことで、生徒の行列への意識が変わることを期待したいが、これも今後の課題である。

(3) 生徒の感想

アンケートには、設問を選択した理由を記述する欄と全体的な感想を記述する欄を設定した。ただ、記述は強制ではなく、「書く、書かない、は自由である。」と指示をしたため、全員が感想を記述した訳ではないが、かなりの生徒が感想を記述した。ここで、得られた感想すべてを「表9」に挙げておく。

表9 生徒の感想

①「とても理解できた。」を選択した理由
・興味深かったし、おもしろくて自分から理解しようとしたから。
・自分で解いた後に別解などの解説があったから。
②「やや理解できた。」を選択した理由
・その1しか思いつけなかったのに、5、6個解法があっ ておどろいたから。
・解説がくわしいから。
③「理解度普通」を選択した理由
・他は理解できたが、解答例2、4はよくわからなかつ たから。
④「やや理解できなかった。」を選択した理由
・進めるのが速すぎてついていけなかった。
⑤「まったく理解できなかった。」を選択した理由
・説明がいまいち理解できなかった。
⑥「やや興味深い。」を選択した理由
・先に習ったこととつながったから。
・入試に出そうだから。
・おもしろいが、今回以上には思いつくことがないため、 もう興味がなくなってしまったから。
⑦「理論体系への見方がやや変わった。」を選択した理由
・ベクトルで表す方法を身につけたいと思った。
・授業と違った考え方ができた。
⑧感想
・結局、何がしたいのかわからなかった。
・早く大学の勉強したい。
・ベクトルでの表し方がよくわからなかった。
・説明がわかりにくいところが多かった。
・発展すぎて自信なくなったー（笑）。
・ふーん、そういうのもあるんやなーっていうだけ。
・だから何なん？て思った。
・これがあると何が便利なのかわからない。
・僕にはむずかしい
・自分で解こうとするとつまるけど、解説きいたらわかつ た。でも、別解すべては理解しきれない。
・今回は時間がなかったので、もうちょっと時間のある ときに、この授業をしてほしかったです。
・言われればなんとなくわかった。
・いろいろな求め方があることがわかった。
・ベクトルと密接な関係だと思った。
・行列で恒等式が使えるとは思ってもみなかった。固定 概念にとらわれずに、いろいろな視点から物事を考え ることが大切だと思った。
・とても興味深かった。
・奥が深い・・・。
・一次変換の考え方を広げて良かったと思います。
・やっぱり数学は奥が深い。

「やや理解できた」を選択した生徒で「その1しか
思いつけなかったのに、5、6個解法があっ
ておどろいたから。」という感想がある。確かに、普通の授業

においては、別解を1つ、もしくは2つくらいは述べ
ることはあるが、本問題のように、5つも別解がある
ことはあまりない。また、普通の授業においては、別
解に対する生徒のモチベーションもあまり高くない。
それが、本問題のように、5つも別解があれば生徒も
驚いたのだろう。そういう意味では、本問題は、題材
として適切であったと思われる。

理解度が普通を選択した生徒で、「他は理解でき
たが、解答例2、4はよくわからなかったから（理解
度は普通）。」という感想があるが、本題材は内容自体が
かなり発展的なため、5つの模範解答例のうち、3つ
理解できれば十分である。本生徒は理解度普通を選択
しているが、こちらの意図としては十分に達成されたと
考えられる。

「やや興味深い」を選択した生徒で「入試に出そう
だから。」という感想があるが、これは大学入試重視
の弊害だろうか。教材に興味を示してくれるのはいい
ことだが、「入試に出る、出ない」が判断基準になっ
ているのは、少し残念なことである。また、感想の所
にも「早く大学の勉強したい。」とあるが、これらは
今後の課題である。本研究は「数学自体の魅力を高校
生に伝える」というのが目的だからである。

「ベクトルと密接な関係だと思った。」という感想が
あるが、これはとても大事なことである。というか、
「行列」と「ベクトル」が密接な関係があるというの
は、極めて自然なことなのである。本来、大学の線形
代数学では、「ベクトル空間やその公理」を学習した
後に、「線形性や線形写像の行列表現」などを学んで
いく。しかし、高校数学においては、ベクトルは「数
学B」の1つの分野として習い、行列は「数学C」の
別の分野として学ぶ。さらに、現行のカリキュラムで
は、行列を学ぶ際あまりベクトルを意識しないような
指導内容となっている。これらの背景もあり、高校生
は「ベクトル」と「行列」をまったく別の数学的な対
象として捉えているのだと考えられる。このことはか
ら、ベクトルから行列へと自然とつながっている数学
的対象の関連が見えにくい現在の数学教育の問題点が、
本研究から浮かび上がってきたといえる。

また、「行列で恒等式が使えるとは思ってもみなかつ
た。固定概念にとらわれずに、いろいろな視点から物
事を考えることが大切だと思った。」という感想があ
るが、本生徒は大切なことに気づいたと思われる。指
導する側が、いくら口頭で「いろいろな視点を持つよ
うに！」と指導をしても、なかなか生徒には伝わらな
い。実際に、数学の問題を解きながら、生徒に自ら気

づかせるのが1番なのである。この生徒には本研究の主旨が十分に伝わっていると考えられる。

最後に、「やっぱり数学は奥が深い。」という感想があるが、1人でも多くの高校生に、このように感じて欲しいというのが本研究の最大のねらいである。

4 発展的な教材

大きさを保つ1次変換に関する学習を問題1で提案したが、さらに発展的な教材を次に扱う。教材を作成する際、横田(1990)や横田(1992)を参考にした。

(1) 直交行列

条件 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列を直交行列という。直交行列の全体を $O(2)$ と表し、直交群という。このとき、問題1の結果から次のことが分かった。

定理1

直交行列 A は、平面上の2点間の距離を保つ。

(2) ユニタリ行列

次に、複素数成分の行列の場合について考えてみたい。また、 $x = x_1 + x_2i$, $y = y_1 + y_2i$ を複素数とし、複素数を成分とするベクトル $\vec{x} = (x, y)$ のノルム $N(\vec{x})$ を次のように定義する。

$$N(\vec{x}) = x\bar{x} + y\bar{y} = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (y_1)^2 + (y_2)^2$$

ここで、 $\bar{x}$, $\bar{y}$ は複素共役を表すものとする。

実数成分の行列に関する問題1を、複素数の場合に発展させると次のような問題になる。

表10 問題プリント2

行列	問題プリント	～ 発展 ～
問題2 (複素数成分の場合)		
複素数を成分とする行列を $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は複素数) とする。また、ベクトル $\vec{x} = (x, y)$ (x, y は複素数) に対して、そのノルムを $N(\vec{x}) = x\bar{x} + y\bar{y}$ と定める。もし、 $N(A\vec{x}) = N(\vec{x})$ が成り立つならば、行列 A はベクトル $\vec{x}$ のノルムを保つという。		
$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つとき、		
行列 A は、ベクトル $\vec{x} = (x, y)$ のノルムを保つか？ 保つときは証明し、保たないときは反例をあげよ。		

(問題2の解答)

「行列 A は、ベクトル $\vec{x}$ のノルムを保つ。」ことを証明する。

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\bar{\alpha}\alpha + \bar{\gamma}\gamma = 1, \bar{\beta}\beta + \bar{\delta}\delta = 1, \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta = 0$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とおくと } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{pmatrix}$$

従って、

$$\begin{aligned} N(A\vec{x}) &= (\alpha x + \beta y)(\overline{\alpha x + \beta y}) + (\gamma x + \delta y)(\overline{\gamma x + \delta y}) \\ &= (\alpha\bar{\alpha} + \bar{\gamma}\gamma)x\bar{x} + (\beta\bar{\beta} + \bar{\delta}\delta)y\bar{y} \\ &\quad + (\alpha\bar{\beta} + \bar{\gamma}\delta)x\bar{y} + (\beta\bar{\alpha} + \bar{\delta}\gamma)y\bar{x} \\ &= x\bar{x} + y\bar{y} = N(\vec{x}) \end{aligned}$$

よって、行列 A は、ベクトル $\vec{x}$ のノルムを保つ。

(解答終)

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を複素数とし、

$$\text{条件 } \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ を満たす行列を}$$

ユニタリ行列という。ユニタリ行列の全体を $U(2)$ と表し、ユニタリ群という。

このとき、問題2の結果から、定理1と同様に次のことが分かった。

定理2

ユニタリ行列 A は、(複素数を成分とする) 平面上の2点間の距離を保つ。

(3) シンプレクティック行列

複素数を拡張し、四元数の場合にも同様に、転置と共役によって行列を定義することができる。

記号 i, j, k を形式的に導入し、それらの積を次のように定める

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j,$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

いま、 a, b, c, d を実数とし、 $a + bi + cj + dk$ である数を四元数という。四元数の和・積において、実数や複素数と同様、結合法則、分配法則、加法に関する交換法則等が成り立つ。ただし、四元数の積においては、交換法則が成り立たない。それは、 $ij = -ji$ から明らかである。ただ、積に関する交換法則が成り立たないというのは、特徴的な性質である。

四元数 $\alpha = a + bi + cj + dk$ に対して、共役元 $\bar{\alpha}$ と長さ $|\alpha|$ をそれぞれ、

$$\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk,$$

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

と定める。

このとき、四元数 α, β に対して、

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha}$$

が成り立つ。

また、四元数 α の実数部分を $\text{Re}(\alpha)$ と表す。

すなわち、四元数 $\alpha = a + bi + cj + dk$ に対して、

$\text{Re}(\alpha) = a$ である。

複素数の場合と同様、四元数の場合は次のような問題となる。

表 11 問題プリント 3

行列	問題プリント	～ 発展 ～
問題 3 (四元数成分の場合)		
四元数を成分とする行列を $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は四元数) とする。また、ベクトル $\vec{x} = (x, y)$ (x, y は四元数) に対して、そのノルムを $N(\vec{x}) = x\bar{x} + y\bar{y}$ と定める。もし、 $N(A\vec{x}) = N(\vec{x})$ が成り立つならば、行列 A はベクトル $\vec{x}$ のノルムを保つという。		
$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つとき、		
行列 A は、ベクトル $\vec{x} = (x, y)$ のノルムを保つか？		
保つときは証明し、保たないときは反例をあげよ。		

(問題 3 の解答)

「行列 A は、ベクトル $\vec{x}$ のノルムを保つ。」ことを証明する。

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より } \bar{\alpha}\alpha + \bar{\gamma}\gamma = 1,$$

$$\bar{\beta}\beta + \bar{\delta}\delta = 1, \quad \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta = 0$$

$$\begin{aligned} N(A\vec{x}) &= (\alpha x + \beta y)(\overline{\alpha x + \beta y}) + (\gamma x + \delta y)(\overline{\gamma x + \delta y}) \\ &= \alpha x \bar{\alpha} + \beta y \bar{\beta} + \gamma x \bar{\gamma} + \delta y \bar{\delta} \\ &\quad + \alpha x \bar{\gamma} + \beta y \bar{\alpha} + \gamma x \bar{\delta} + \delta y \bar{\beta} \end{aligned}$$

ここで、 $x\bar{x} = |x|^2$, $y\bar{y} = |y|^2$ は共に実数より

$$\begin{aligned} \alpha x \bar{\alpha} + \beta y \bar{\beta} + \gamma x \bar{\gamma} + \delta y \bar{\delta} \\ = |x|^2(\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma}) + |y|^2(\beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta}) \\ = 0 \end{aligned}$$

従って、

$$\alpha x \bar{\gamma} + \beta y \bar{\alpha} + \gamma x \bar{\delta} + \delta y \bar{\beta} = 0$$

を示せばよい。

ここで、 $\overline{\alpha x \bar{\gamma}} = \beta y \bar{\alpha}$, $\overline{\gamma x \bar{\delta}} = \delta y \bar{\beta}$ より、

$$\begin{aligned} \alpha x \bar{\gamma} + \beta y \bar{\alpha} + \gamma x \bar{\delta} + \delta y \bar{\beta} \\ = 2\{\text{Re}(\alpha x \bar{\gamma}) + \text{Re}(\gamma x \bar{\delta})\} \end{aligned}$$

よって、 $x\bar{y} = 1, i, j, k$ のとき、

$$\text{Re}(\alpha x \bar{\gamma}) + \text{Re}(\gamma x \bar{\delta}) = 0$$

を示せばよい。

$x\bar{y} = 1$ のとき、

$\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta}$ の実数部分と $\bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta$ の実数部分は等しい。

よって、 $\text{Re}(\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta}) = 0$

$x\bar{y} = i$ のとき、

$\alpha i \bar{\beta} + \gamma i \bar{\delta}$ の実数部分と $\bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta$ の i の係数は等しい。

よって、 $\text{Re}(\alpha i \bar{\beta} + \gamma i \bar{\delta}) = 0$

同様に、 $x\bar{y} = j, k$ のときも

$$\text{Re}(\alpha x \bar{\gamma}) + \text{Re}(\gamma x \bar{\delta}) = 0$$

以上より $N(A\vec{x}) = N(\vec{x})$ であり、

行列 A は、ベクトル $\vec{x}$ のノルムを保つ。

(解答終)

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を四元数とし、

条件 $\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列をシンプレクティック行列という。シンプレクティック行列の全体を $Sp(2)$ と表し、シンプレクティック群という。

このとき、問題 3 の結果から、定理 2 と同様に次のことが分かった。

定理 3

シンプレクティック行列 A は、(四元数とを成分とする) 平面上の 2 点間の距離を保つ。

5 結論及び今後の課題

本研究においては、高校生の数学への興味・関心を育てるために、距離を保つ行列を用いた教材を開発した。距離を保つ行列は、等長変換や直交行列として、高校数学の参考書等で紹介されているが、計算自体が主であるため、その概念的な意味をつかむことが難しい。そのため、本研究のように概念を正しく理解させるような教材を開発することは重要であると思われる。

本研究により得られた成果や今後の課題は次の 7 点である。

①興味・関心の育成

アンケートの統計的な結果において、興味・関心に関しては、「やや興味深い」「とても興味深い」の両項目を合わせると 40%弱となり、興味・関心を育てる

という意味において、本研究は一定の成果があったと結論づけることができる。

②自由な発想

本教材の問題文を「思いつくことを自由に書きなさい。」とすることで、生徒自身に考えさせ自由な発想で記述させることを意図した。生徒の答案を、解答別に分類した結果「関係式を求めよ。」「回転移動を記述」「対称式を記述」「円について記述」など様々な方法でアプローチしており、こちらの意図はある程度達成された。

③多角的な視点

本教材においては、別解がいくつも存在することで、1つの問題を多角的な視点で見ることができるようにと考えた。生徒の感想に「5、6個解法があっただろいた。」「いろいろな求め方があることがわかった。」等があるように、そのあたりを感じとった生徒が存在することが分かった。今後、そのあたりを感じとれる生徒が増えるような教材開発をしていく必要がある。

④数学への意識

生徒の感想に「固定概念にとらわれずに、いろいろな視点から物事を考えることが大切だと思った。」とあったが、これは筆者が予期せぬ収穫であった。教材開発を行う際、こちらはそこまで考えていなかったが、生徒にとっては今まで別々のものとして認識していた数学的な対象が、本教材によって結びつき固定概念から解き放たれたようである。今後、高校生の数学への意識を変えていけるような教材を開発できればと考えている。

⑤教材の理解度

アンケートの統計的な結果において、理解度については平均的な結果であった。本教材は発展的な内容を

扱っているだけに、このことは必ずしも悪い結果ではない。ただし、生徒の「発展すぎて自信なくなったー(笑)。」という感想もあった。今後、生徒への説明方法をより分かりやすく行えるように、工夫をする必要がある。

⑥大学入試との関連

高校生の意識として、確かに、大学入試のために数学を勉強するという側面も存在する。生徒の感想にも「入試に出そうだから。」とあったが、本研究は入試のための数学学習を提案するものではなく、数学自体への興味・関心を育てるものである。この問題は生徒の意識や現場の高校教員の指導法とも関係しているが、このあたりの意識の改善策を考える必要がある。

⑦開発した教材の拡張

本研究において等長変換を題材として授業実践を行ったが、この教材を複素数や四元数の場合へ拡張した教材も同時に開発した。こちらは発展的な内容となっているため、科学クラブなど、より意欲的な生徒への教材として期待される。今後内容を一層吟味し科学クラブ等への実践を行うことが課題である。

参考文献

- 松岡学 (2014)「集合の考え方を意識した確率の問題に関する数学科教材開発」、大阪樟蔭女子大学研究紀要, 第4巻, 159-167.
- 松岡学 (2015)「ウィルソンの定理を題材とした高校数学における教材開発」、鳥取大学数学教育研究, vol. 7 no. 5, 1-10.
- 横田一郎 (1990)「古典型単純リー群」, 現代数学社.
- 横田一郎 (1992)「例外型単純リー群」, 現代数学社.

The Teaching Materials Development of Isometric Transformations for High School Mathematics

Faculty of Child Sciences, Department of Child Sciences
Manabu MATSUOKA

Abstract

The purpose of this study is to bring up interest to mathematics for high school students. A new concept is included in the field of the matrices of high school mathematics. For example, noncommutativity, nilpotency, linearity. These properties are surprising things for high school students. We took up the isometric transformations for the subject since it contained very interesting contents. We developed the teaching materials of isometric transformations. It is creation and multifaced answers to be important by learning of high school mathematics. We taught it using the teaching materials which we developed. The method of the investigation is the questionnaire survey.

Keywords: Matrices, Isometric Transformations, Interest, Creation, Multidirectional Viewpoint.